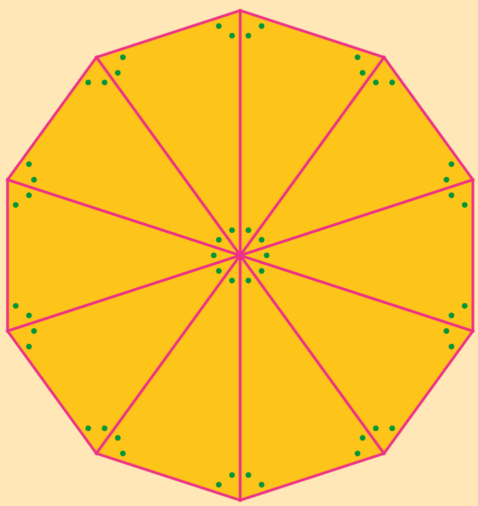
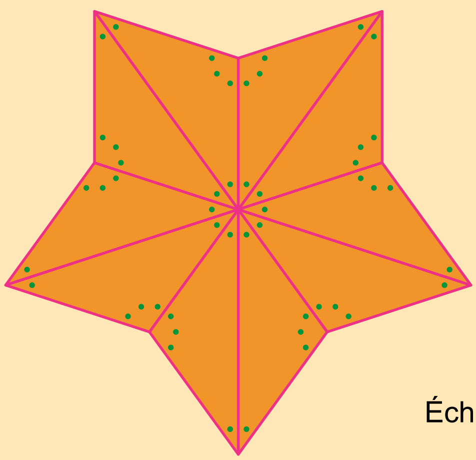
Le Trianglor

Puzzle mathématique

(2 × 10 triangles d'or)

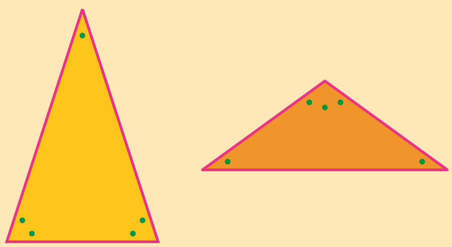




Le nombre d'or, noté Φ, est la plus grande solution de l'équation $x^2 = x + 1$, l'autre solution étant $1 - \Phi$.

$\Phi = 1,618\ldots$

On appelle « **triangles d'or** » deux sortes de triangles isocèles :



… l'un, de côtés proportionnels à $(1, \Phi, \Phi)$ et d'angles 1 décitour au sommet et 2 décitours à la base, que nous appelons « triangle A » (comme aigu),

… l'autre, de côtés proportionnels à $(1, 1, \Phi)$ et d'angles 3 décitours au sommet et 1 décitour à la base, que nous appelons « triangle O » (comme obtus).

Notez que les deux premières figures montrent que la somme des 10 angles marqués par 1 point vaut 1 tour.

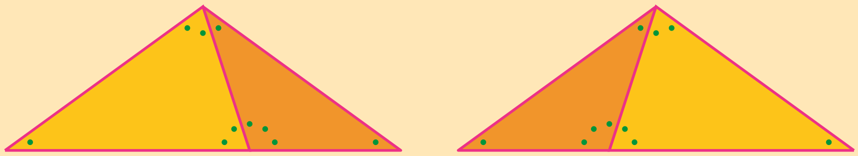
Φ est la limite du rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = 1 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Voici les premiers termes de cette suite :

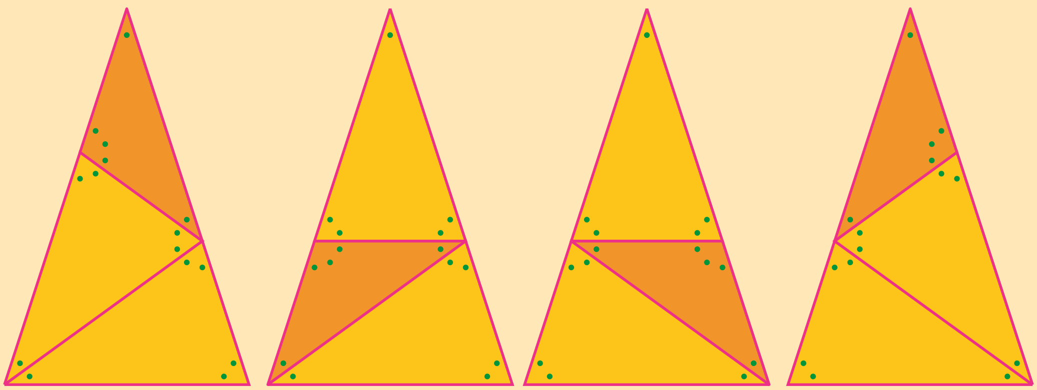
• 1 • 1 • 2 • 3 • 5 • 8 • 13 • 21 • 34 • 55 • 89 • 144 • 233 • 377 • 610…

Avec 1 triangle A et 1 triangle O, on peut réaliser un triangle O un peu plus grand (de côtés exactement Φ fois plus grands) :

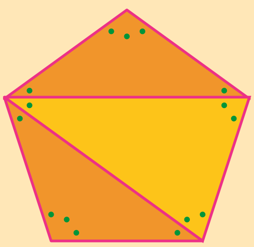


Il y a une manière de le faire (et son symétrique)

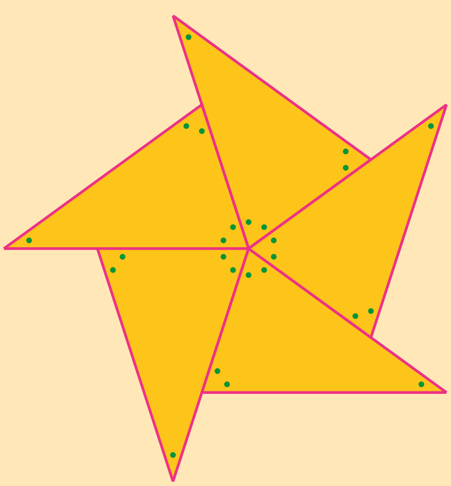
Avec 2 triangles A et 1 triangle O, on peut réaliser un triangle A un peu plus grand (de côtés exactement Φ fois plus grands) :



Il y a deux manières de le faire (et leurs symétriques)

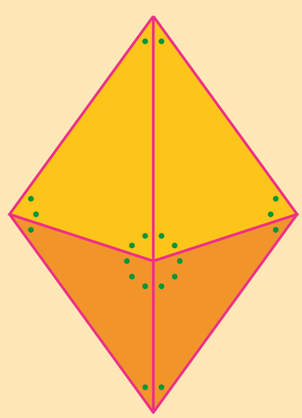


Avec 2 triangles O et 1 triangle A, on peut réaliser un pentagone régulier, comme ci-contre.

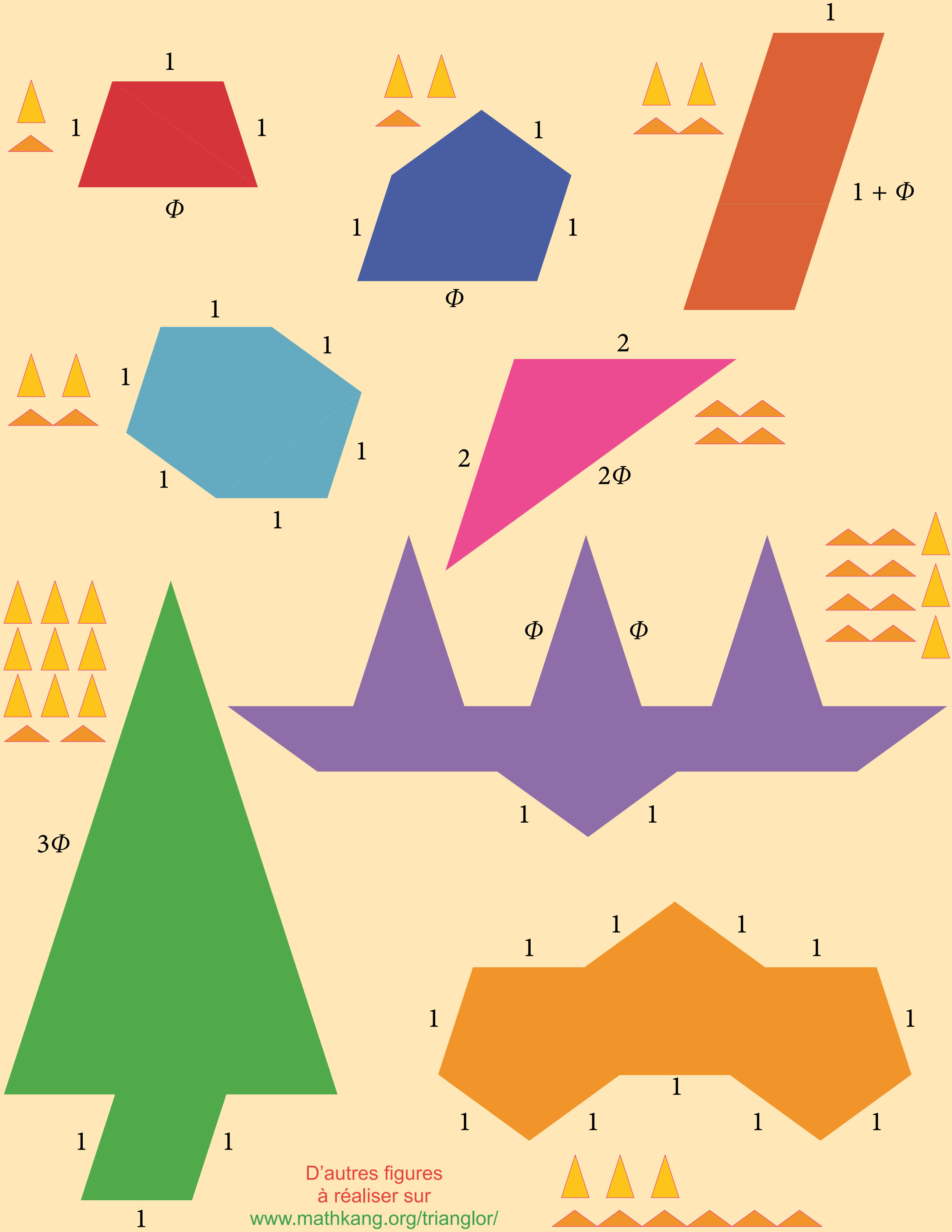


L'assemblage de gauche montre que chacun des 5 angles marqués de 2 points vaut bien 2 décitours.

L'assemblage de droite montre que chaque angle marqué de 3 points vaut bien 3 décitours (on a en effet $2 + 2 + 3 + 3 = 10$).



Avec des triangles d’or, réaliser chacune des figures suivantes.
Les figures sont à l’échelle ½ et les triangles à utiliser sont donnés à côté de la figure.
L’unité, 1, mesure le plus petit côté d’un triangle d’or.



D’autres figures
à réaliser sur
www.mathkang.org/trianglor/

Le fait que l'on puisse décomposer un triangle d'or en triangles d'or plus petits, et cela autant qu'on le veuille, donne lieu à d'assez étonnants pavages de triangles aux fantastiques propriétés.
Ainsi :

0 on peut découper un triangle O, en 1 triangle O et 1 triangle A, soit 2 triangles,

1 on peut découper un triangle A, en 1 triangle O et 2 triangles A, soit 3 triangles,

2 on peut découper un triangle O, en 2 triangles O et 3 triangles A, soit 5 triangles,

3 on peut découper un triangle A, en 3 triangles O et 5 triangles A, soit 8 triangles,

4 on peut découper un triangle O, en 5 triangles O et 8 triangles A, soit 13 triangles,

5 on peut découper un triangle A, en 8 triangles O et 13 triangles A, soit 21 triangles,

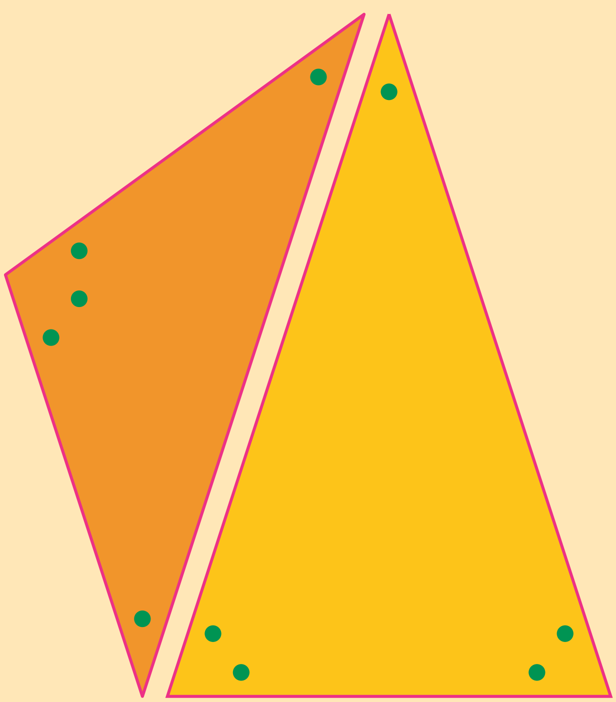
6 on peut découper un triangle O, en 13 triangles O et 21 triangles A, soit 34 triangles,

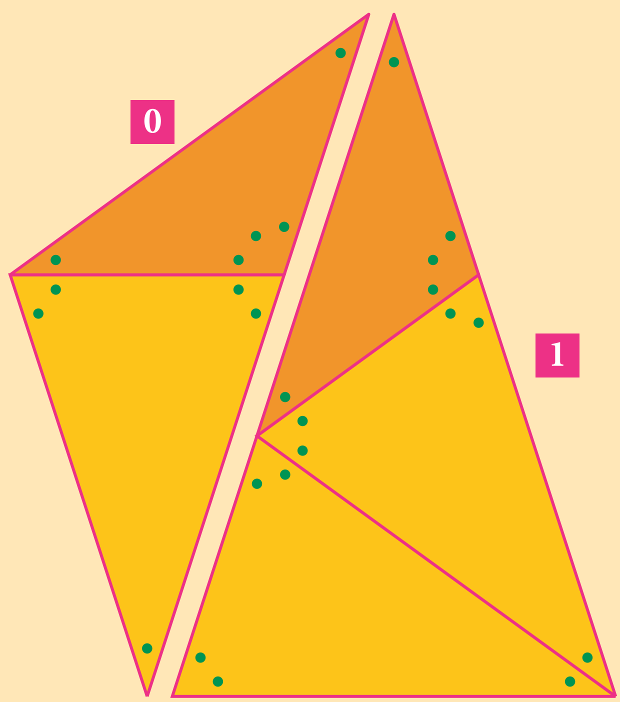
7 on peut découper un triangle A, en 21 triangles O et 34 triangles A, soit 55 triangles,

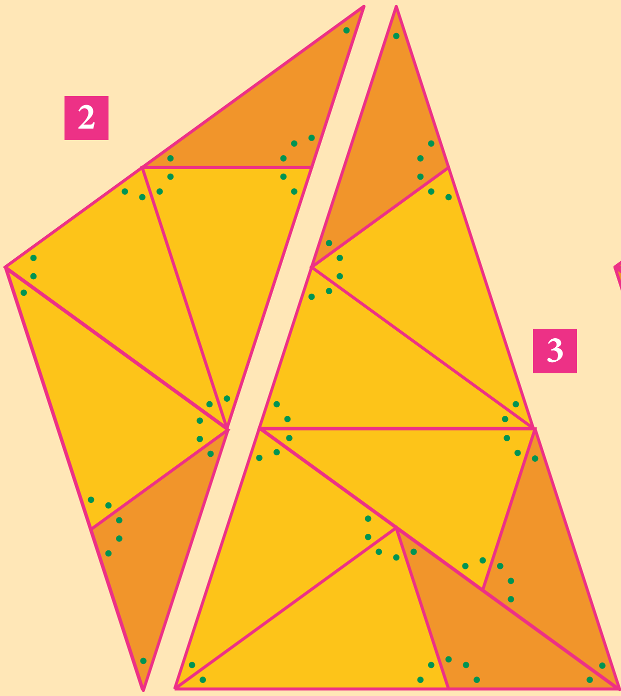
8 on peut découper un triangle O, en 34 triangles O et 55 triangles A, soit 89 triangles,

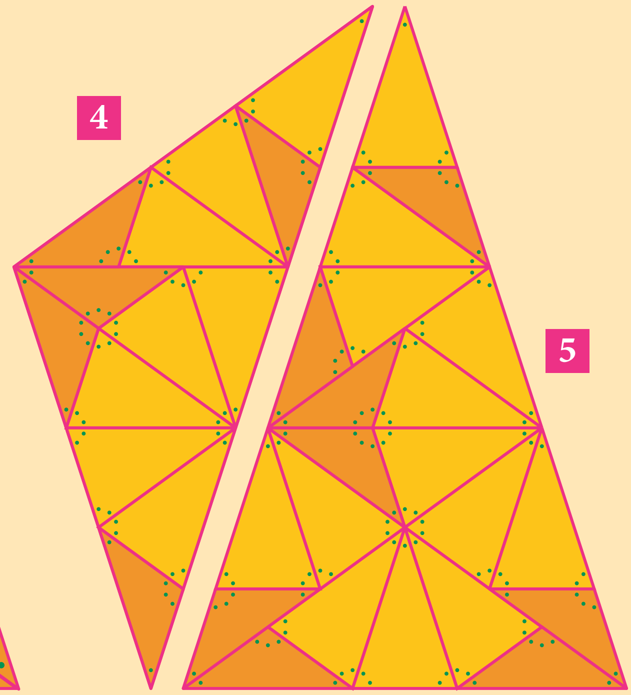
9 on peut découper un triangle A, en 55 triangles O et 89 triangles A, soit 144 triangles.

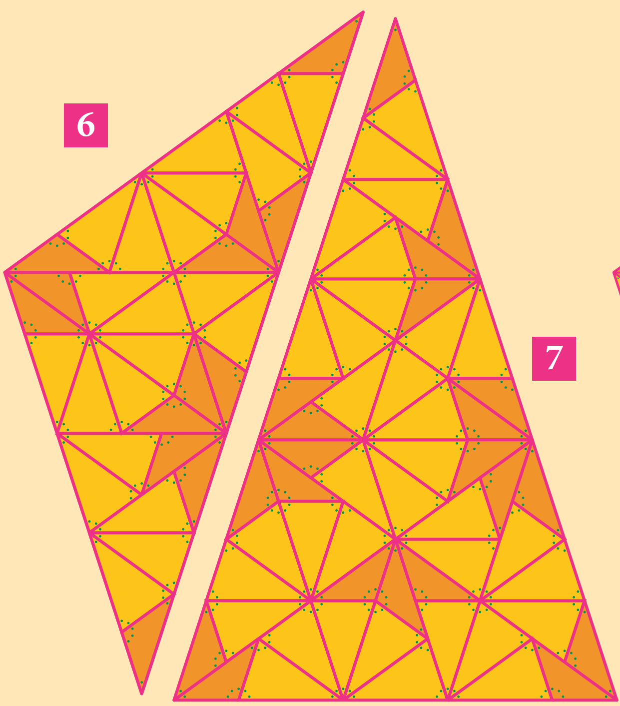
Plus généralement, on peut découper un triangle, de type O pour n pair ou de type A pour n impair, en F_n triangles O et F_{n+1} triangles A, c'est-à-dire en F_{n+2} triangles.

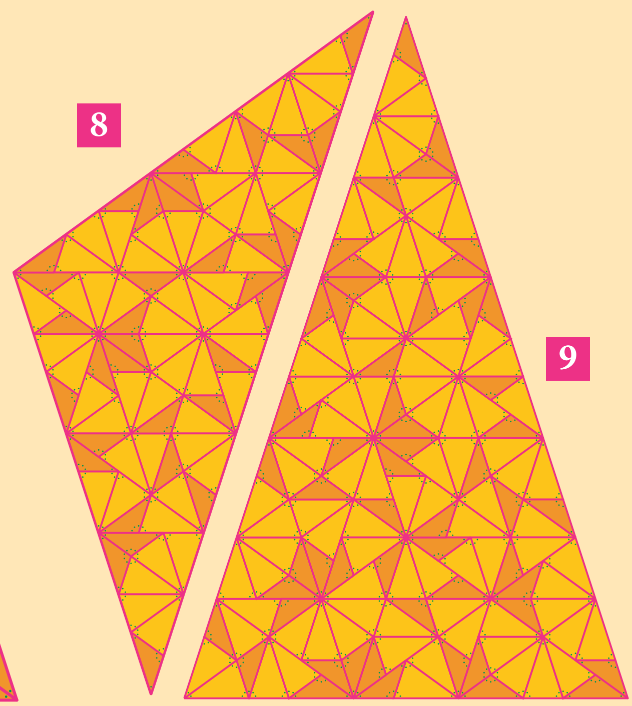





2
3


4
5


6
7


8
9

Les pavages de Penrose

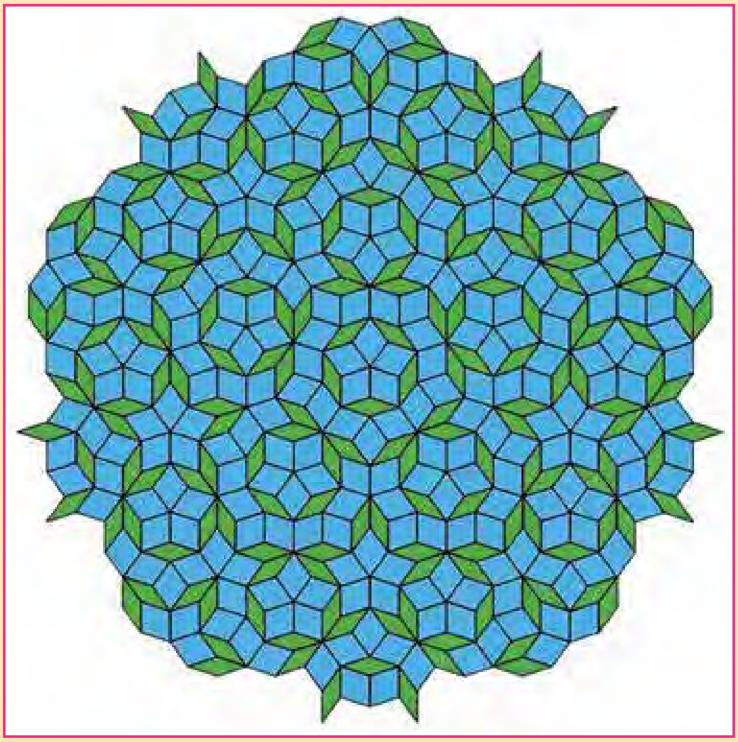
Evgraf Fedorov, cristallographe mathématicien russe, a montré, en 1891, qu'il n'existait, dans le plan, que 17 pavages réguliers (ou « périodiques », c'est-à-dire réalisés à partir d'un motif reproduit une infinité de fois par deux translations indépendantes).

Roger Penrose sur le carrelage non-périodique du foyer de l'institut Mitchell, Texas A&M University

Cependant, **Roger Penrose** (né en 1931) inventa des pavages d'un type étonnant : ils ne sont pas périodiques mais seulement « quasi-périodiques », en ce sens que tout motif fini apparaissant dans le pavage se répète infiniment dans le pavage.

Il y a trois types de pavages de Penrose :

- P_1, construit à partir de losanges et de pentagones réguliers ou étoilés.
- P_2, construit à partir de « cerfs-volants » et de « fléchettes ».
- P_3, construit à partir de deux sortes de losanges.

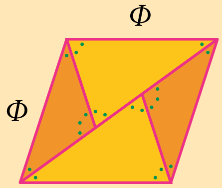


On a découvert, en 1984, des matières dont la structure ressemble à celle des cristaux tout en étant curieusement non périodique. Elles se sont trouvées modélisables par des pavages de Penrose. Comme le disait déjà Penrose, à propos de la relativité générale : « *On ne sait jamais vraiment quand on perd son temps !* »

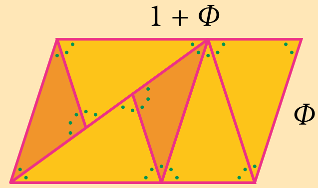
Curieusement, tous ces pavages sont invariants dans une rotation d'angle 2 décitours. Cela témoigne de leur parenté avec les pentagones réguliers ; et d'ailleurs, plus précisément, on constate que tous les polygones d'un pavage de Penrose sont des assemblages de deux triangles d'or !

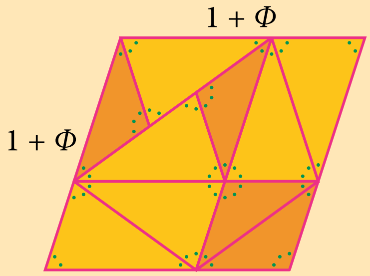
Les triangles d'or peuvent finalement s'assembler pour former des figures géométriques, mais aussi pour réaliser des puzzles plus figuratifs…

On peut réaliser des parallélogrammes…

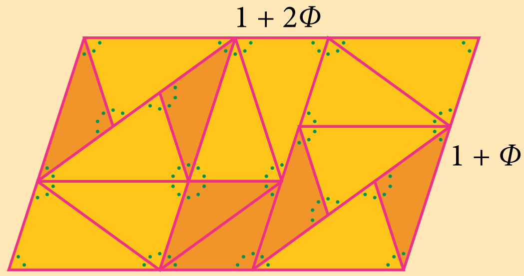


- avec 2 triangles O et 2 triangles A, de côtés Φ et Φ.
- avec 2 triangles O et 4 triangles A, de côtés Φ et $1 + \Phi$.



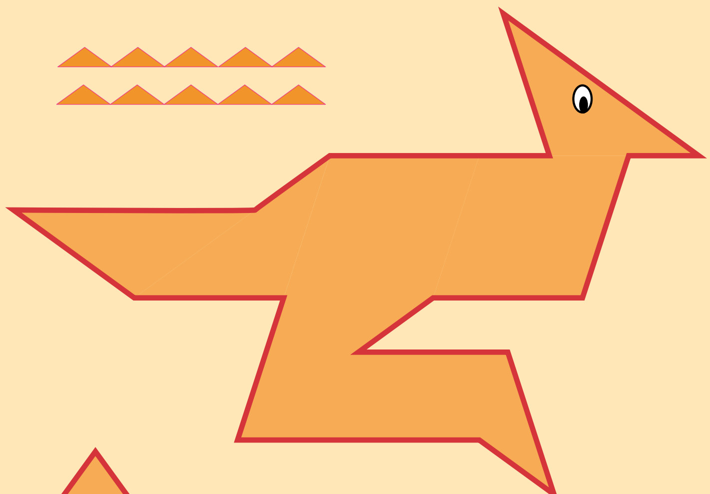


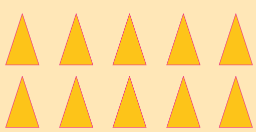
- avec 4 triangles O et 6 triangles A, de côtés $1 + \Phi$ et $1 + \Phi$.
- avec 6 triangles O et 10 triangles A, de côtés $1 + \Phi$ et $1 + 2\Phi$.

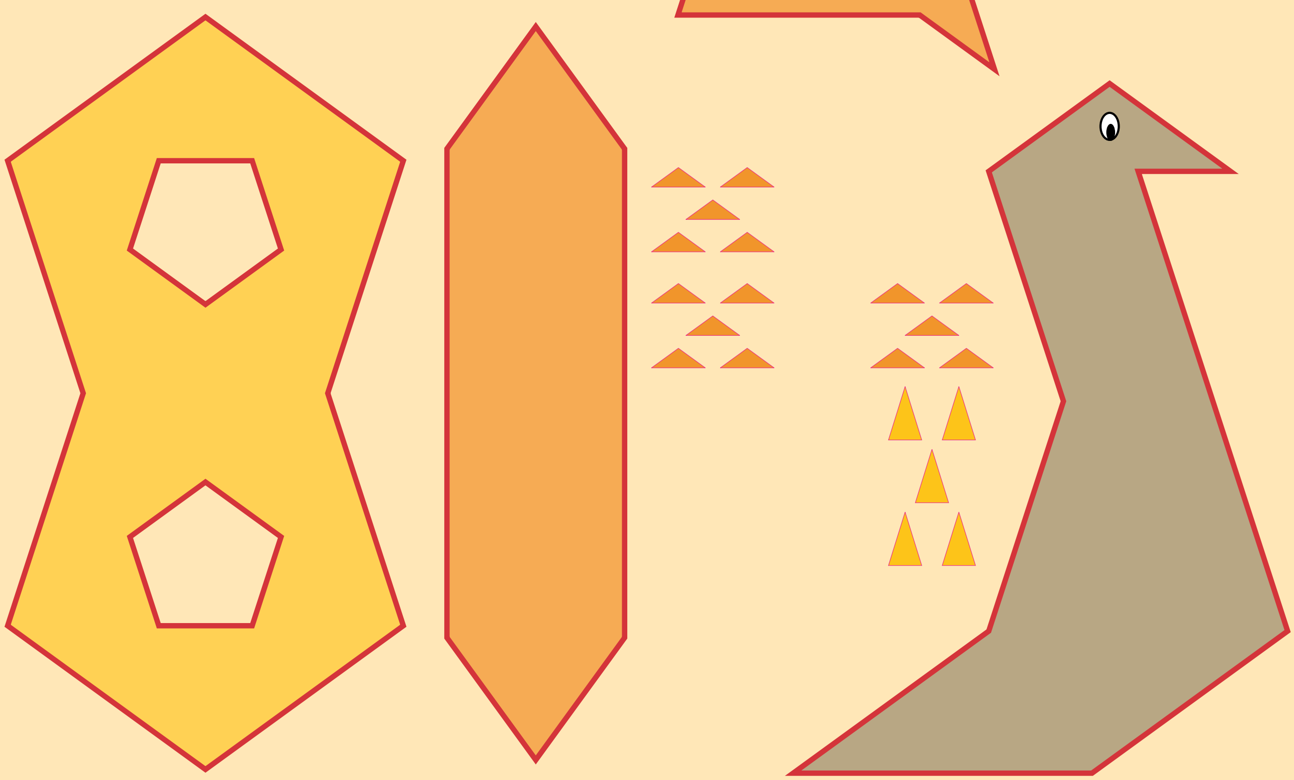


Réaliser les dessins figuratifs suivants.

Échelle $\frac{1}{2}$

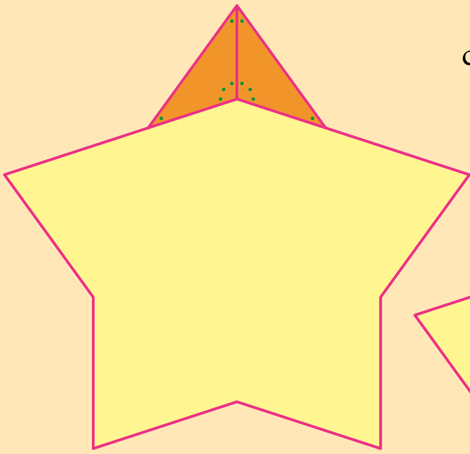




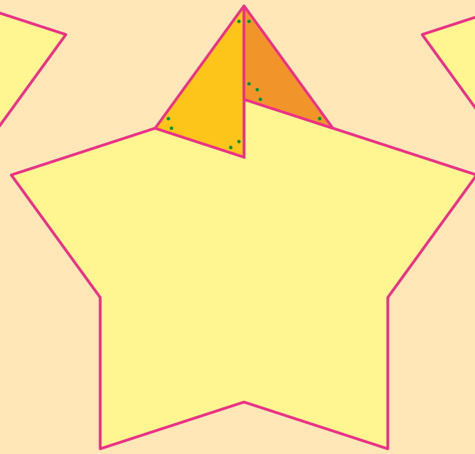


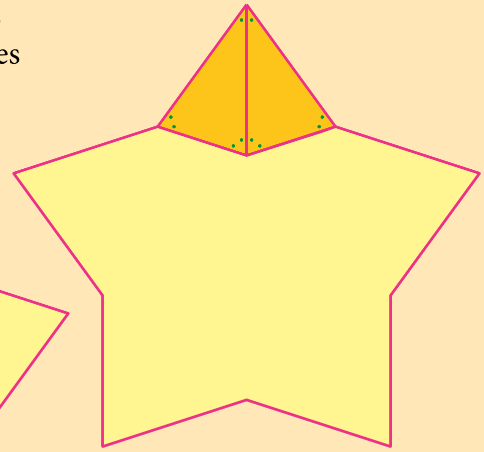
Avec les 20 triangles d'or, réaliser les figures suivantes (échelle ≈ 0,3).

L'étoile à cinq branches

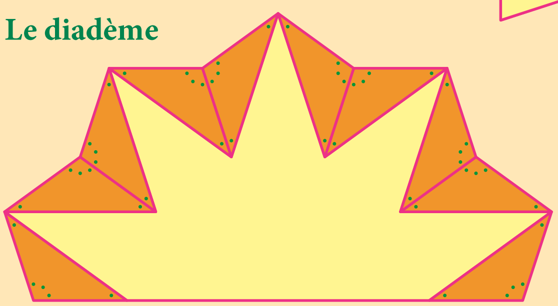


Il y a au moins 3 solutions commençant chacune par les 2 pièces déjà disposées.



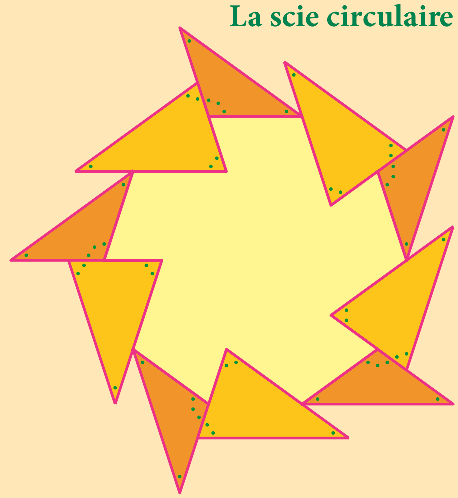


Le diadème

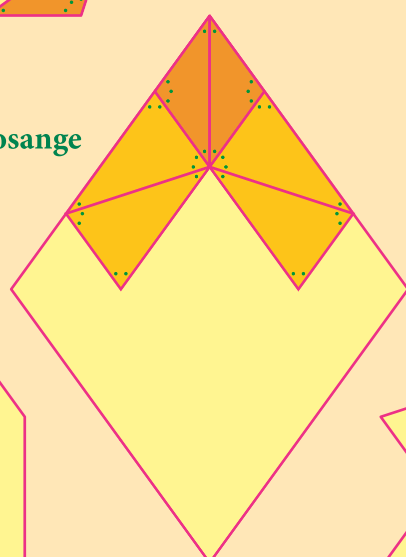


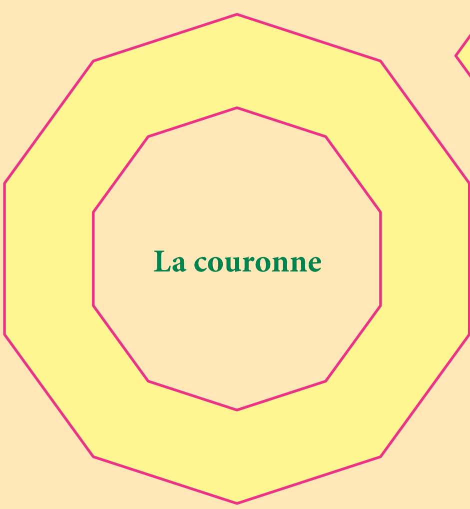
On peut commencer comme indiqué. Et, là aussi, il y a beaucoup plus que 3 solutions.

La scie circulaire

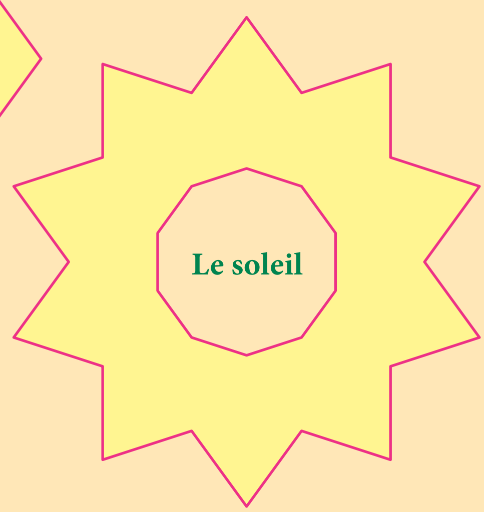


Le grand losange





La couronne



Le soleil

Le TRIANGLOR, puzzle mathématique, ISBN : 978-2-87694-229-5

Solutions, compléments et autres défis sur www.mathkang.org/trianglor/