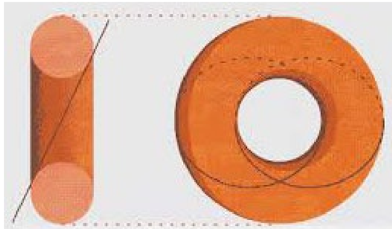
Les cercles de Villarceau



Antoine Yvon-Villarceau (Vendôme 15 janvier1813– Paris 23 décembre 1883) était ingénieur, astronome et mathématicien.
À 24 ans, en 1837, Antoine Yvon rentre à l'École Centrale en ajoutant à son nom « Villarceau », nom d'une terre qu'il a léguée à la ville de Vendôme.
Il est élu membre de l'Académie des Sciences en 1867, dans les Comptes-rendus desquels il avait fait paraître une note en 1848 (tome 27, p. 246).

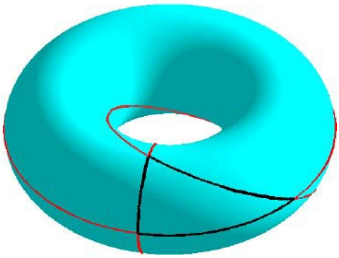
GÉOMÉTRIE. — *Extrait d'une Note communiquée à* M. Babinet *par* M. YVON VILLARCEAU.

« ..... Comme vous vous êtes beaucoup occupé des sections circulaires des surfaces, je prends la liberté de vous faire connaître un résultat relatif à un troisième système de sections circulaires qu'admet le tore circulaire ordinaire, résultat que depuis longtemps j'avais communiqué à M. Ollivier.

» Voici ce théorème : ce n'est pas seulement en coupant le tore par un plan perpendiculaire à l'axe ou par un plan méridien, que l'on obtient des systèmes de sections circulaires ; on obtient encore des sections circulaires quand le plan sécant passe par le centre du tore et qu'il est en même temps tangent à sa surface. Dans ce cas, la courbe d'intersection se réduit à deux cercles égaux qui se coupent aux deux points de contact. Leur rayon est égal à celui du cercle décrit par le centre du cercle générateur : leurs centres sont situés sur la droite menée par le centre du tore perpendiculairement à l'axe de celui-ci et à la ligne des contacts ; ils sont distants de part et d'autre du centre du tore, d'une quantité égale au rayon du cercle générateur.

» C'est en exprimant l'équation de la courbe d'intersection en coordonnées polaires, que j'ai reconnu la possibilité de décomposer cette équation en deux facteurs, dont chacun égalé à zéro est l'équation polaire d'un cercle. »

Nous suivons ici les pas de Marcel Berger, ancien directeur de l'IHÉS (Institut des Hautes Études Scientifiques), auteur inoubliable de la *Géométrie*, Cédic-Fernand Nathan, 1979.



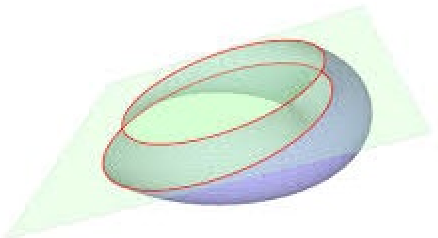
On repère facilement sur un tore deux familles infinies de cercles :

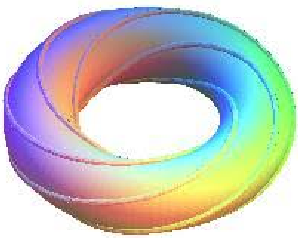
. les *méridiens* dans des plans verticaux,

. les *parallèles* dans des plans horizontaux.

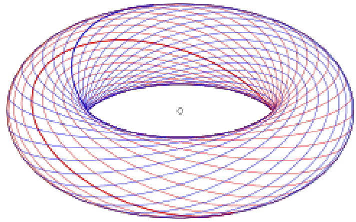
Les *cercles de Villarceau,* qui sont les intersections du tore avec ses plans bitangents, sont plus difficiles à voir.

Chacun de ces plans coupe le tore le long de deux cercles s'intersectant en deux points, pour constituer ainsi deux familles de cercles symétriques.

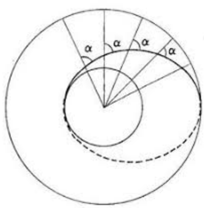




Les cercles de Villarceau d'une même famille sont enlacés les uns dans les autres, aucun d'entre eux ne coupant aucun des autres.

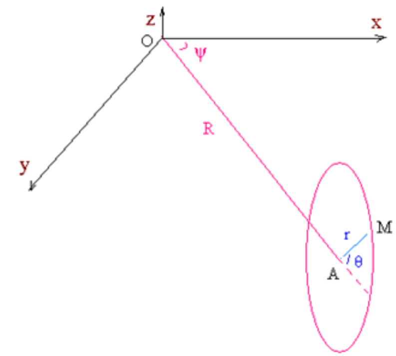


Par-contre tout cercle d'une famille coupe tous les cercles de l'autre famille.



Tout cercle de Villarceau est une *loxodromie* du tore : il est coupé par tout cercle méridien sous un angle caractéristique du tore.

Équations cartésienne et paramétriques du tore et de ses cercles de Villarceau



Un point M du tore est paramétré par les angles ψ et θ comme suit :

$x = (R + r\cos\theta)\cos\psi$
$y = (R + r\cos\theta)\sin\psi$
$z = r\sin\theta.$

En éliminant ψ et θ (ou en écrivant $AM^2 = r^2$), on obtient l'équation cartésienne du tore, du quatrième degré : $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2 (x^2 + y^2)$.

Dans le plan (x,z),l'équation des bitangentes est $r^2x^2 = (R^2 - r^2) z^2$. On peut alors vérifier que l'intersection du plan bitangent et du tore est aussi l'intersection de ce plan avec d'une part la sphère centrée en (0,r,0) et de rayon R, d'autre part la sphère symétrique par rapport au plan xOz.
Cette intersection est bien composée de deux cercles centrés sur le petit cercle de rayon r dans le plan xOz et de rayon R.

Il existe une autre démonstration de l'existence des cercles de Villarceau, sans aucun calcul, dans le cadre d'une géométrie contemporaine. Ceux qui disposent du vocabulaire nécessaire à sa lecture se régaleront du texte de Marcel Berger à l'adresse internet : www.bibnum.education.fr/sites/default/files/villarceau-analyse.pdf
Ils y verront comment la géométrie projective complexe nous amène visiter les points à l'infini imaginaires des cercles et retrouver, dans l'espace, l'ombilicale et ses poétiques points cycliques…

On peut rencontrer des cercles de Villarceau dans le quartier de la cathédrale de Strasbourg, au musée de l'Œuvre Notre- Dame,

consacré aux sculptures moyenâgeuses.
On accède en effet au premier étage par un magnifique escalier en colimaçon dessiné par l'architecte Hans Thoman Uhlberger.
Cet ouvrage étonnant date d'environ 1580, lorsque la partie Ouest du bâtiment de l'Œuvre Notre-Dame a été construite.
Soutenant la voûte supérieure, les colonnes de l'axe de l'escalier sont entrecoupées de tores, sur lesquels on aperçoit, tracés en relief, trois cercles de Villarceau, appartenant à la même famille, enlacés…

Antoine Yvon-Villarceau, vers 1880, après une vie consacré aux curiosités que l'intelligence humaine nous propose, à travers nos progrès sociaux, les outils technologiques que nous inventons, les sciences que nous développons, …