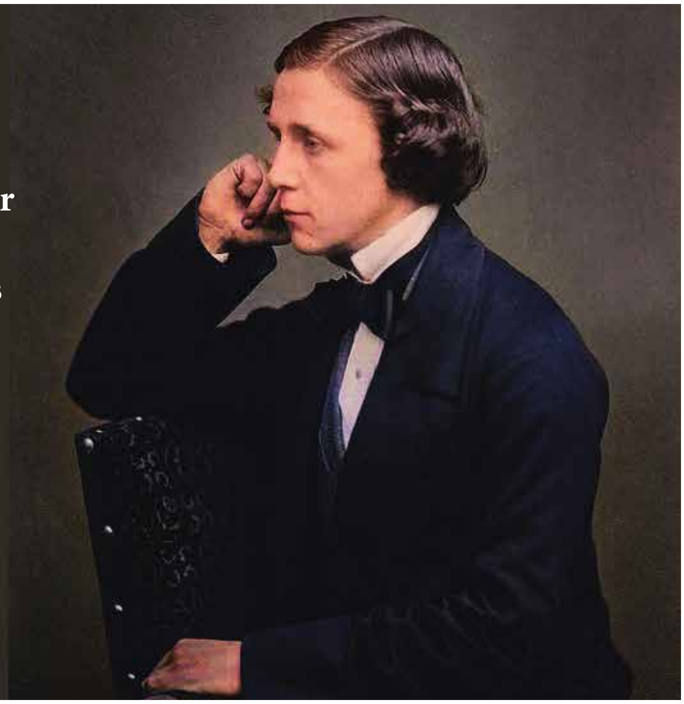
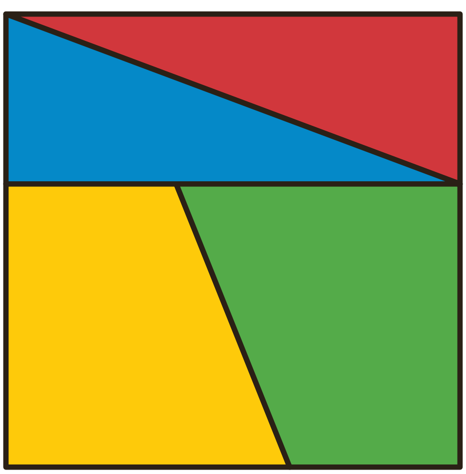
Les vrais-faux puzzles de Fibonacci

Beaucoup de gens connaissent le puzzle, dit de Lewis Carroll, basé sur la quasi-égalité entre 8^2 et 13×5… et donc sur la quasi-égalité des aires du rectangle 13×5 et du carré de 8 de côté.
Ce puzzle est obtenu en découpant le carré 8×8 en quatre morceaux selon la figure de gauche.

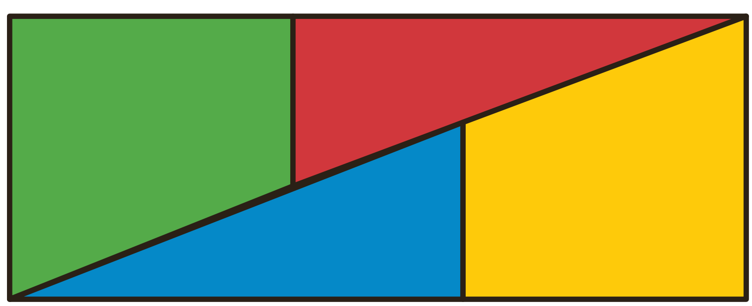


8

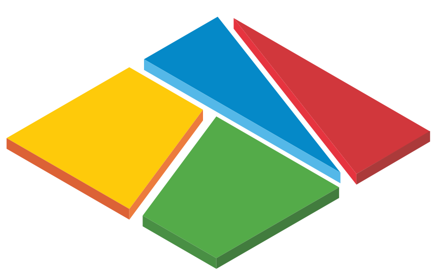


8 × 8 = 64

13 × 5 = 65

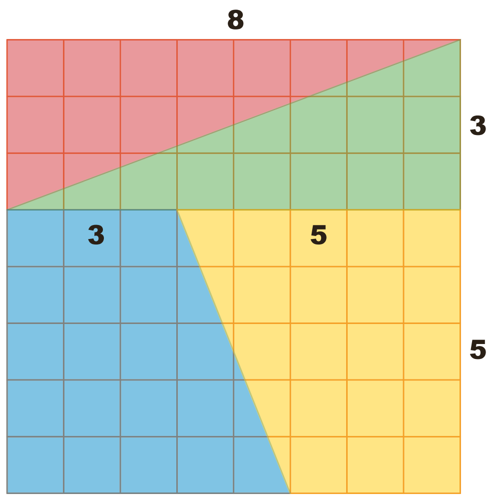


13 × 5 = 65

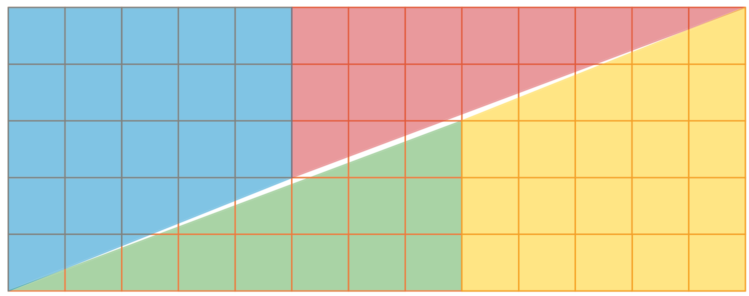


(5, 8, 13)

On peut alors placer ces quatre pièces dans un rectangle 5 × 13, comme le montre la figure de droite. Le « paradoxe », repéré par Lewis Carroll (qui en a pourtant vu bien d'autres au pays des merveilles), est que cela semble montrer que 64 = 65 !
En fait, 1 unité de surface est négligeable (devant 64) ; elle ne se voit pas si on ne trace que la diagonale du rectangle, car elle est répartie sur un espace « diagonal **» de 15 cm de long entre les quatre pièces (la figure suivante montre l'étroitesse de cet espace).**



8 × 8 = 13 × 5 + 1



La suite de Fibonacci

Pour les amis des nombres, la suite des trois nombres (5, 8, 13) devrait évoquer une suite connue : ce triplet fait en effet partie de la ***suite de Fibonacci*** :

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 …

D'autant plus que c'est la propriété caractéristique des termes de cette suite qui assure les bonnes longueurs du découpage du carré : ***chaque terme est la somme des deux précédents*** (ici 3 + 5 = 8 et 5 + 8 = 13) !

On se dit alors que tout triplet de termes successifs de cette suite peut donner lieu à un puzzle analogue. En effet, il est facile de montrer ceci :

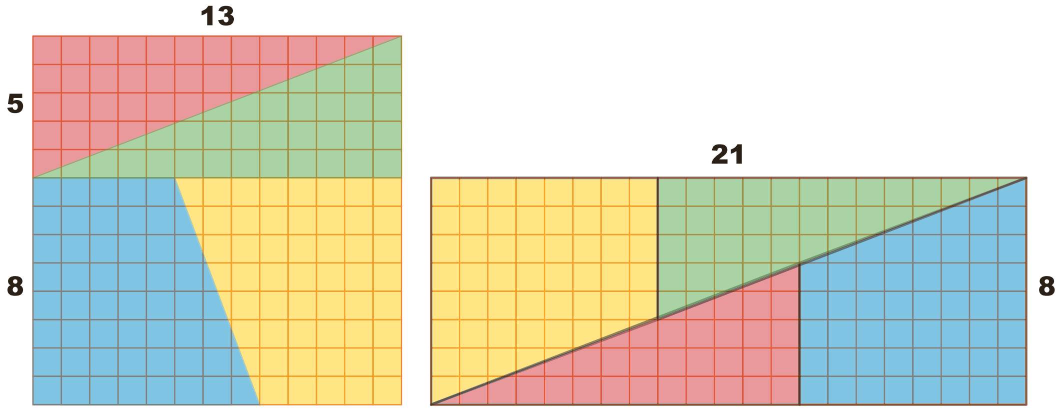
Si a, b, c, sont trois termes successifs de la suite de Fibonacci, alors le produit des deux extrêmes est égal au carré du terme central, à une unité près : $a \times c = b^2 \pm 1$ **(formule 1).**

C'est facile (et rigolo) de vérifier cette propriété sur les premiers termes :

$$2^2 = 1 \times 3 + 1$$
$$3^2 = 2 \times 5 - 1$$
$$5^2 = 3 \times 8 + 1$$
$$8^2 = 5 \times 13 - 1$$
$$13^2 = 8 \times 21 + 1$$
$$\ldots$$

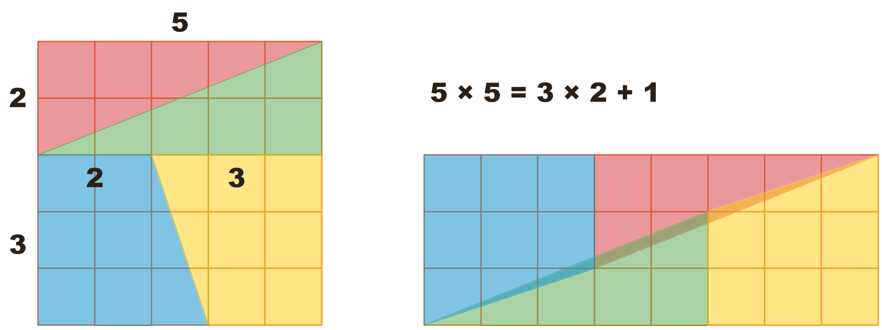
(8, 13, 21)

Ainsi, avec le triplet (8,13, 21), on fabrique un puzzle en découpant un carré de 13 de côté, comme sur la figure ci-dessous.
Ces 4 pièces se placent tranquillement dans un rectangle de 8 sur 21.
Et, ici, l'ajustement des pièces semble parfait, car l'imperfection de l'assemblage est de l'ordre de la précision habituelle des découpages.



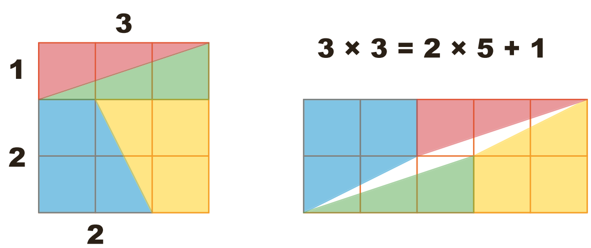
(3, 5, 8)

On peut mieux comprendre l'aspect paradoxal d'un « puzzle de Fibonacci » en regardant ce qui se passe pour de petits nombres.
Par exemple pour le triplet (3, 5, 8), il faut découper un carré 5 × 5 comme sur la figure suivante. On voit que ces pièces « peuvent » alors s'assembler pour former un rectangle 3 × 8. Mais ici, ce n'est pas un petit espace qu'il y a entre les pièces, comme dans le triplet (5, 8, 13) mais, plutôt, un petit recouvrement des pièces (comme l'indique l'alternance des signes pour la formule 1).



(2, 3, 5)

Autre « puzzle » avec le triplet 2, 3, 5, pour lequel $2 \times 5 = 3^2 + 1$:



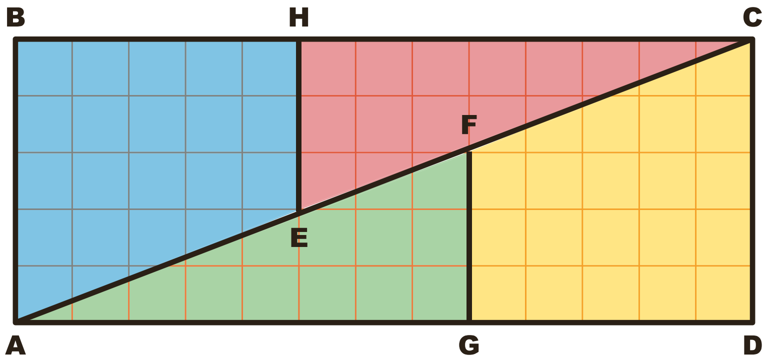
Ici, 1 n'est pas vraiment négligeable devant 9 et l'espace diagonal se voit grossièrement.

La disparition de l'unité

Voyons maintenant comment une autre propriété des termes de la suite de Fibonacci assure l'alignement apparent des côtés des pièces formant la diagonale du rectangle :

Si a et b sont deux termes successifs de la suite de Fibonacci, alors le rapport b/a est de plus en plus proche du nombre d'or φ, lorsque le numéro de ces termes augmente.

Ainsi 3/2 = 1,5   5/3 = 1,666   8/5 = 1,6   13/8 = 1,625   21/13 = 1,615… φ = 1,618…



Avec les notations de la figure ci-dessus on aurait en effet, d'après le théorème de Thalès, si AF était bien un segment de la diagonale AC : $\dfrac{AG}{FG} = \dfrac{AD}{CD}$.

Or pour le triplet (5, 8, 13) : $\dfrac{AG}{FG} = \dfrac{8}{3} = 2{,}666\ldots$

mais $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{13}{5} = 2{,}6$ (notez que $\varphi^2 = \varphi + 1 = 2{,}618\ldots$).

Ces deux valeurs ne sont effectivement pas égales, donc les segments ne sont pas vraiment alignés. Mais, ces valeurs sont assez proches, d'où l'alignement apparent des segments…

Une autre disparition…

En se promenant entre le XIII^e et le XIX^e siècle, et en songeant à la relation $b^2 - ac = \pm 1$ pour un triplet de termes successifs (a, b, c) de la suite de Fibonacci, on peut se rappeler une formule analogue entre les quadruplets de termes successifs (a, b, c, d) de la suite de Fibonacci :

$\boldsymbol{ad - bc = \pm 1}$ (formule 2).

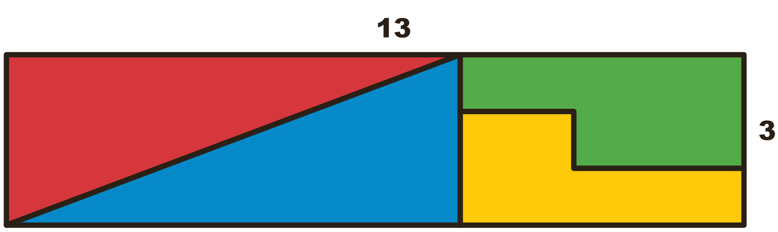
On vérifie en effet, pour le quadruplet (3, 5, 8, 13), que

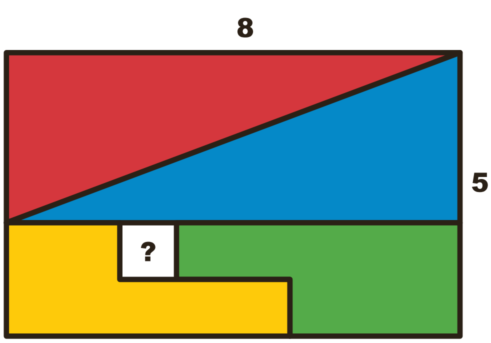
3 × 13 =39 et 5 × 8 = 40.

De même, pour (5, 8, 13, 21), on a 5 × 21=105 et 8 × 13 = 104.

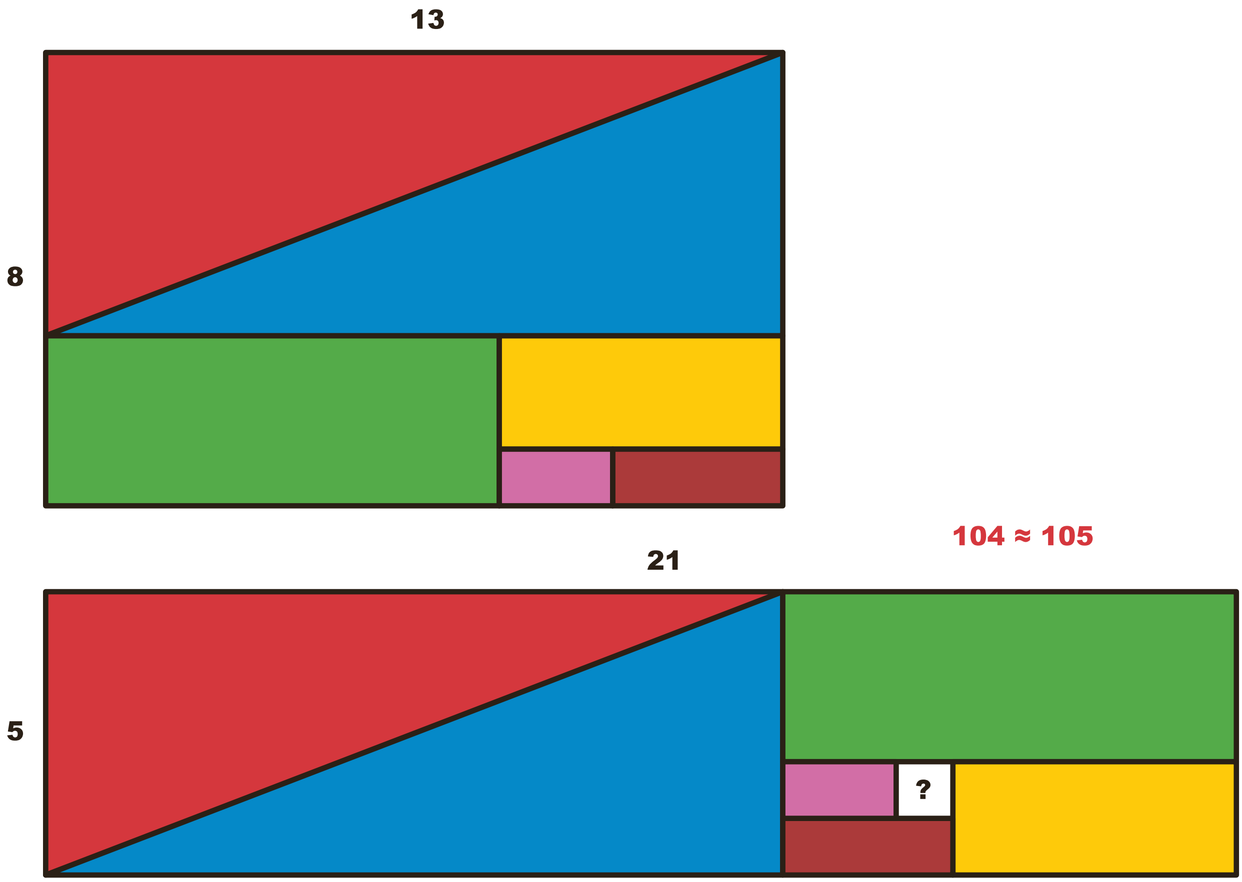
On peut certainement aussi inventer des sortes de puzzles faisant apparaître que 39 n'est pas très loin de 40, ni 104 de 105.

Les figures suivantes répondent à ce souci : on y voit disparaître une case d'un dessin à l'autre…





40 ≈ 39



André Deledicq