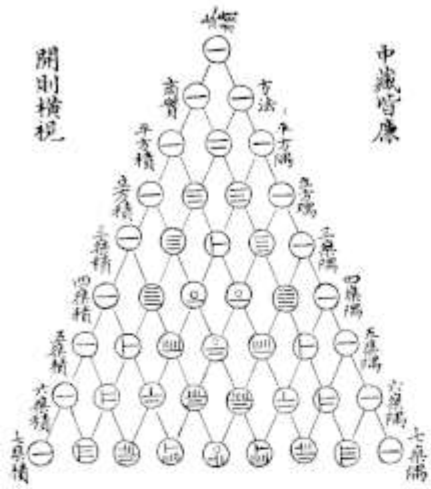
Le triangle arithmétique

Blaise Pascal (1623-1662) n'a pas inventé le triangle arithmétique, puisqu'on trouve le dessin ci-contre dans un livre chinois de 1303 de Zhu Shijie : *Miroir de jade des quatre inconnues*.

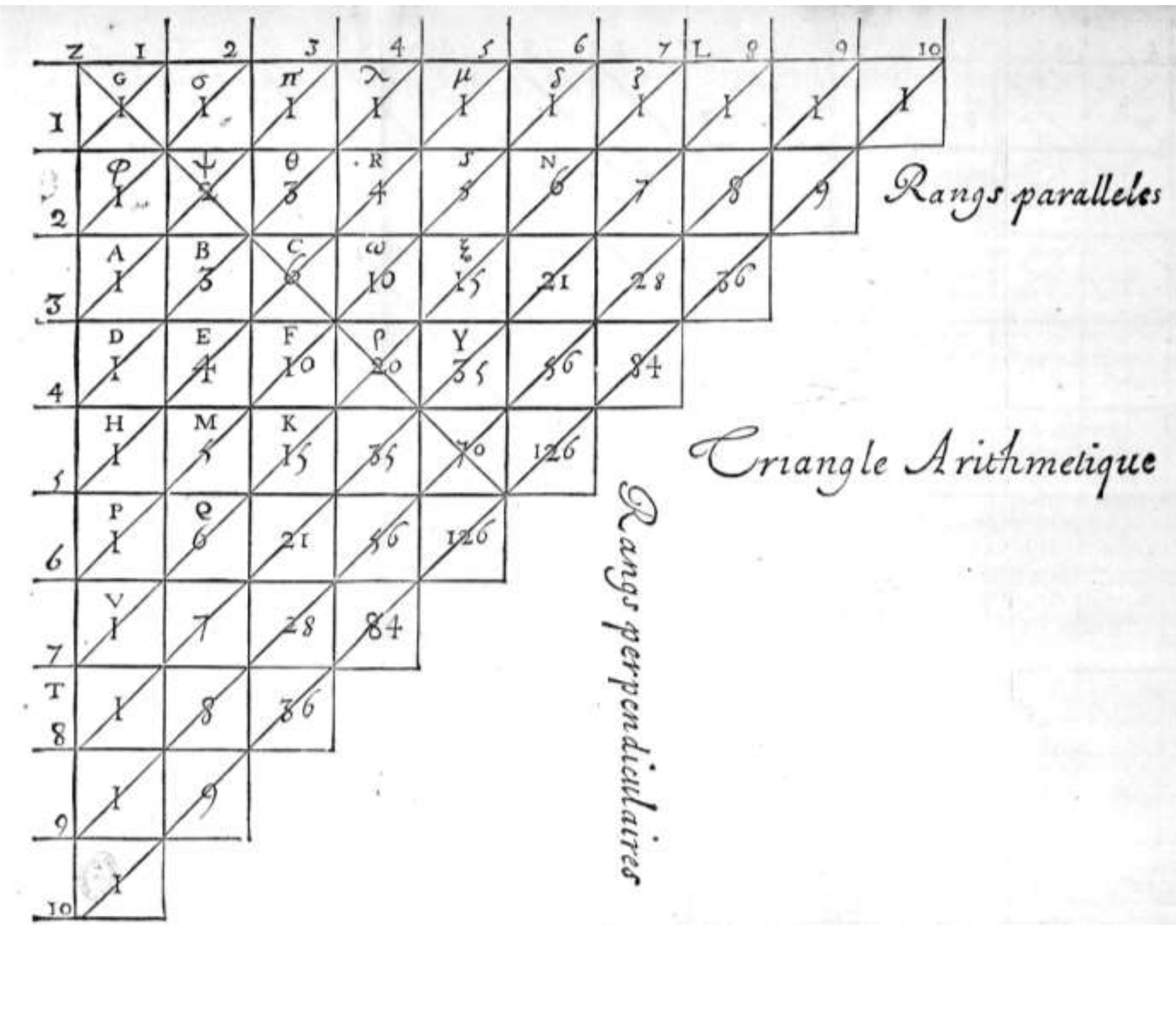


Mais c'est lui qui en a énoncé et démontré les principales propriétés ; et c'est aussi lui qui en a développé les divers usages pour les combinaisons, les probabilités et les puissances d'un binôme.

Son livre, le *Traité du triangle arithmétique* est paru en 1654. On y trouve en particulier la première utilisation explicite et bien formulée du raisonnement par récurrence.

En attendant le petit classique Kangourou, qui paraîtra cette année du quadri-centenaire de Pascal, nous vous donnons ici un extrait des six premières pages de cet ouvrage.

Le Kangourou des mathématiques — www.mathkang.org



TRAITTE' DV TRIANGLE ARITHMETIQVE.

DEFINITIONS.

I'*Appelle* Triangle Arithmetique, *vne figure dont la construction est telle.*

Ie mene d'vn point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires, l'vne à l'autre, G V, G ζ, dans chacune desquelles ie prens tant que ie veux de parties égales, & continües à commencer par G, que ie nomme 1. 2. 3. 4. *&c. & ces nombres sont* les exposans *des diuisions des lignes.*

En suitte ie ioints les points de la premiere diuision qui sont dans chacune des deux lignes, par vne autre ligne qui forme vn triangle dont elle est la base.

Ie ioints ainsi les deux points de la seconde diuision par vne autre ligne, qui forme vn second triangle dont elle est la base.

Et ioignant ainsi tous les points de diuision, qui ont vn mesme exposant, i'en forme autant de triangles & de bases.

Ie mene par chacun des points de diuision, des lignes paralleles aux costez, qui par leurs intersections forment de petits quarrez, que i'appelle Cellules.

Et les cellules qui sont entre deux paralleles qui vont de gauche à droit, s'appellent cellules d'vn mesme rang parallele, *comme les cellules, G, σ, π, &c. ou φ, ψ, θ, &c.*

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas, s'appellent, cellules d'vn mesme rang perpendiculaire, *comme les cellules G, φ, A, D, &c. & celles-cy, σ, ψ, B, &c.*

Et celles qu'vne mesme base trauerse diagonalement sont dites cellules d'vne mesme base, *comme celles qui suiuent, D, B, θ, λ, & celles-cy, A, ψ, π.*

Les cellules d'vne mesme base également distantes de ses extremitez, sont dites reciproques, *comme celles-cy, E, R, & B, θ. Parce que l'exposant du rang parallele de l'vne, est le mesme que l'exposant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paroist en cet exemple, ou E, est* *dans le second rang perpendiculaire, & dans le quatriesme parallele; & sa reciproque R, est dans le second rang parallele, & dans le quatriesme perpendiculaire reciproquement. Et il est bien facile de demonstrer que celles qui ont leurs exposans reciproquement pareils, sont dans vne mesme base, & également distantes de ses extremitez.*

Il est aussi bien facile de demonstrer, que l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, ioint à l'exposant de son rang parallele, surpasse de l'vnité l'exposant de sa base.

Par exemple, la cellule F, est dans le troisiéme rang perpendiculaire, & dans le quatriesme parallele, & dans la sixiesme base, & ces deux exposants des rangs, 3 † 4 surpassent de l'vnité l'exposant de la base 6. ce qui vient de ce que les deux costez du Triangle sont diuisez en vn pareil nombre de parties, mais cela est plustost compris, que demonstré.

Cette remarque est de mesme nature, que chaque base contient vne cellule plus que la precedente, & chacune autant que son exposant d'vnitez, ainsi la seconde φ σ à deux cellules, la troisiesme A ψ π en a trois &c.

Or les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouuent par cettte methode.

Le nombre de la premiere cellule qui est à l'angle droit est arbitraire, mais celuy-là estant placé tous les autres sont forcez, & pour cette raison il s'appelle le Generateur *du triangle. Et chacun des autres est specifié par cette seule regle.*

Le nombre de chaque cellule, est égal à celuy de la cellule qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus à celuy de la cellule qui la precede dans son rang parallele. Ainsi la cellule F, c'est à dire le nombre de la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E; & ainsi des autres.

D'où se tirent plusieurs consequences. En voicy les principales, où ie considere les triangles, dont le generateur est l'vnité; mais ce qui s'en dira conuiendra à tous les autres.

Consequence premiere.

En tout Triangle Arithmetique, toutes les cellules du premier rang parallele, & du premier rang perpendiculaire, sont pareilles à la generatrice.

Car par la construction du Triangle, chaque cellule est égale à celle qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus à celle qui la precede dans son rang parallele; Or les cellules du premier rang parallele, n'ont aucunes cellules qui les precedent dans leurs rangs perpendiculaires, ny celles du premier rang perpendiculaire dans leurs rangs paralleles, donc *dans le second rang perpendiculaire, & dans le quatriesme parallele; & sa reciproque R, est dans le second rang parallele, & dans le quatriesme perpendiculaire reciproquement. Et il est bien facile de demonstrer que celles qui ont leurs exposans reciproquement pareils, sont dans vne mesme base, & également distantes de ses extremitez.*

Il est aussi bien facile de demonstrer, que l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, ioint à l'exposant de son rang parallele, surpasse de l'vnité l'exposant de sa base.

Par exemple, la cellule F, est dans le troisiéme rang perpendiculaire, & dans le quatriesme parallele, & dans la sixiesme base, & ces deux exposants des rangs, 3 † 4 surpassent de l'vnité l'exposant de la base 6. ce qui vient de ce que les deux costez du Triangle sont diuisez en vn pareil nombre de parties, mais cela est plustost compris, que demonstré.

Cette remarque est de mesme nature, que chaque base contient vne cellule plus que la precedente, & chacune autant que son exposant d'vnitez, ainsi la seconde φ σ à deux cellules, la troisiesme A ψ π en a trois &c.

Or les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouuent par cettte methode.

Le nombre de la premiere cellule qui est à l'angle droit est arbitraire, mais celuy-là estant placé tous les autres sont forcez, & pour cette raison il s'appelle le Generateur *du triangle. Et chacun des autres est specifié par cette seule regle.*

Le nombre de chaque cellule, est égal à celuy de la cellule qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus à celuy de la cellule qui la precede dans son rang parallele. Ainsi la cellule F, c'est à dire le nombre de la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E; & ainsi des autres.

D'où se tirent plusieurs consequences. En voicy les principales, ou ie considere les triangles, dont le generateur est l'vnité; mais ce qui s'en dira conuiendra à tous les autres.

Consequence premiere.

En tout Triangle Arithmetique, toutes les cellules du premier rang parallele, & du premier rang perpendiculaire, sont pareilles à la generatrice.

Car par la construction du Triangle, chaque cellule est égale à celle qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus à celle qui la precede dans son rang parallele; Or les cellules du premier rang parallele, n'ont aucunes cellules qui les precedent dans leurs rangs perpendiculaires, ny celles du premier rang perpendiculaire dans leurs rangs paralleles, donc elles sont toutes égales entr'-elles, & partant au premier nombre generateur.

Ainsi, φ, égale G † zero, c'est à dire φ, égale, G.

Ainsi A, égale φ † zero, c'est à dire φ.

Ainsi σ, égale G † zero, & π, égale σ † zero.

Et ainsi des autres.

Consequence seconde.

En tout Triangle Arithmetique, chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallele precedent, comprises depuis son rang perpendiculaire iusques au premier inclusiuement.

Soit vne cellule quelconque ω, ie dis qu'elle est égale à R † θ † ψ † φ, qui sont celles du rang parallele superieur depuis le rang perpendiculaire de ω, iusques au premier rang perpendiculaire.

Cela est euident par la seule interpretation des cellules, par celles d'où elles sont formées.

Car ω, égale R † C.

θ † B

ψ † A

Car A & φ sont égaux entr'eux.

φ par la precedente.

Donc ω égale R † θ † ψ † φ.

Consequence troisiesme.

En tout Triangle Arithmetique, chaque cellule égale la somme de toutes celles du rang perpendiculaire precedent, comprises depuis son rang parallele iusques au premier inclusiuement.

Soit vne cellule quelconque C, ie dis qu'elle est égale à B † ψ † σ, qui sont celles du rang perpendiculaire precedent depuis le rang parallele de la cellule C, iusques au premier rang parallele.

Cela paroist de mesme par la seule interpretation des cellules.

Car C, égale B † θ.

ψ † π

Car π égale σ par la premiere.

σ

Donc C, égale B † ψ † σ.

Consequence quatriesme.

En tout Triangle Arithmetique, chaque cellule diminuée de l'vnité, est égale à la somme de toutes celles qui sont comprises entre son rang parallele, & son rang perpendiculaire exclusiuement.

Soit vne cellule quelconque ξ, ie dis que ξ—G égale R † θ † ψ † φ † λ † π † σ † G; qui sont tous les nombres compris entre le rang ξ ω C B A, & le rang ξ S μ, exclusiuement.

Cela paroist de mesme par l'interpretation.

$$\text{Car } \xi \text{ égale } \lambda \dagger R \dagger \underbrace{\omega}_{\pi \dagger \theta \dagger \underbrace{C}_{\sigma \dagger \psi \dagger \underbrace{B}_{G \dagger \varphi \dagger \underbrace{A}_{G}}}}$$

Donc ξ égale λ † R † π † θ † σ † ψ † G † φ † G.

Aduertissement.

I'ay dit dans l'enonciation, chaque cellule diminuée de l'vnité, *parce que l'vnité est le generateur; mais si c'estoit vn autre nombre, il faudroit dire*, chaque cellule diminuée du nombre generateur.

Consequence cinquiesme.

En tout Triangle Arithmetique, chaque cellule est égale à sa reciproque.

Car dans la seconde base φ σ, il est euident que les deux cellules reciproques φ, σ, sont égales entr'elles, & à G.

Dans la troisiesme A, ψ, π, il est visible de mesme que les reciproques π, A, sont égales entr'elles & à G.

Dans la quatriesme, il est visible que les extremes D, λ, sont encores égales entr'elles & à G.

Et celles d'entre deux, B, θ, sont visiblement égales, puisque B égale A † ψ & θ égale ψ † π, or π † ψ sont égales à A † ψ parce qui est monstré donc &c.

Ainsi l'on monstrera dans toutes les autres bases que les reciproques sont égales, parce que les extremes sont tousiours pareilles à G,

& que les autres s'interpreteront tousiours par d'autres égales dans la base precedente qui sont reciproques entr'elles.

Consequence sixiesme.

En tout Triangle Arithmetique, vn rang parallele, & vn perpendiculaire, qui ont vn mesme exposant, sont composez de cellules toutes pareilles les vnes aux autres.

Car ils sont composez de cellules reciproques.

Ainsi le second rang perpendiculaire $\sigma\ \psi$ B E M Q est entierement pareil au second rang parallele $\varphi\ \psi\ \theta$ R S N.

Consequence septiesme.

En tout Triangle Arithmetique, la somme des cellules de chaque base, est double de celles de la base precedente.

Soit vne base quelconque D B θ λ. Ie dis que la somme de ses cellules, est double de la somme des cellules de la precedente A ψ π.

Car les extremes, D, λ, égalent les extremes, A, π,

Et chacune des autres B, θ, en égalent deux de, A + ψ, ψ + π, l'autre base.

Donc, D + λ + B + θ, égalent 2 A + 2 ψ + 2 π,

La mesme chose se demonstre de mesme de toutes les autres.

Consequence huictiesme.

En tout Triangle Arithmetique, la somme des cellules de chaque base, est vn nombre de la progression double, qui commence par l'vnité, dont l'exposant est le mesme que celuy de la base.

Car la premiere base est l'vnité.

La seconde est double de la premiere, donc elle est 2.

La troisiesme est double de la seconde, donc elle est 4.

Et ainsi à l'infiny.

Aduertissement.

Si le generateur n'estoit pas l'vnité, mais vn autre nombre comme 3, la mesme chose seroit vraye; mais il ne faudroit pas prendre les nombres de la progression double à commencer par l'vnité, sçauoir, 1, 2, 4, 8, 16. &c. mais ceux d'vne autre progression double à commencer par le generateur 3, sçauoir, 3, 6, 12, 24, 48, &c.