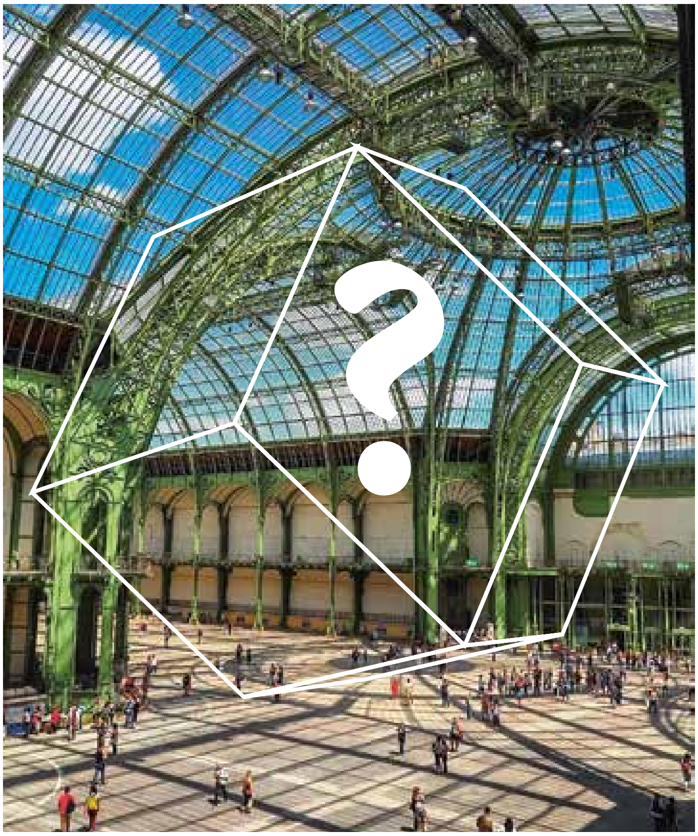
# Le mystère du polyèdre du Palais de la Découverte



Voulue par le prix Nobel de physique, Jean Perrin, sous-secrétaire d'État à la recherche pendant le Front Populaire, une exposition alors nommée *Le Palais de la Découverte* voit le jour le 24 mai 1937 au sein de l'Exposition Universelle de 1937 à Paris. Il y eut alors une grande fête inaugurale où furent exposés, dans la Salle de mathématiques, une large collection de polyèdres (solides ayant toutes leurs faces planes).

Certains de ces polyèdres, selon une note datant de 1942, auraient été présentés en lien avec la possibilité de paver entièrement l'espace uniquement avec des exemplaires d'un même polyèdre (comme on peut le faire par exemple avec des briques parallélépipédiques). L'un d'entre eux, *qui pourrait-être un cuboctaèdre, serait un assemblage de 8 solides identiques, obtenus en collant un tétraèdre régulier sur une des faces triangulaires d'une pyramide régulière à base carrée*. Un tel solide, qui ressemble à la cale que l'on glisse contre une roue de voiture pour la bloquer, a été appelé *sabot* par un ambassadeur de Roumanie, grand amoureux des mathématiques, nommé Matila Ghyka (auteur, en 1931, d'un beau livre sur *Le nombre d'or*). Une lettre d'un visiteur roumain, adressée aux responsables du département de mathématiques du Palais, demande des précisions sur ce mystérieux polyèdre aux huit sabots, qui a non seulement complètement disparu, mais que personne n'a jamais véritablement décrit !

*(Suite de la page 9.)*

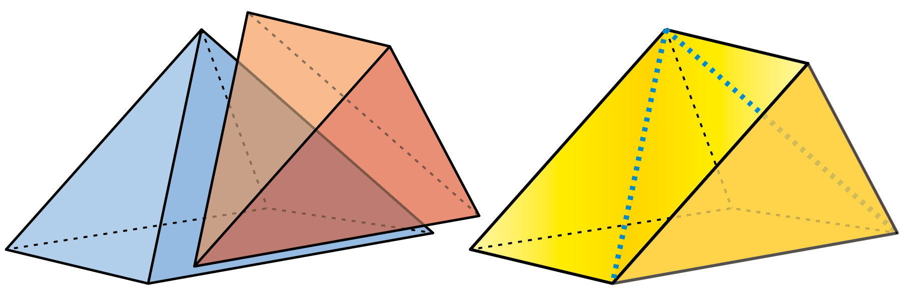
Heureusement, pour se détendre, un membre de l'équipe du Kangourou des Mathématiques, passionné de problèmes, de jeux et d'énigmes mathématiques, ici nommé Évariste, s'intéressa au problème et redécouvrit ce polyèdre mystérieux !

Reprenons le cours de ses recherches, à partir du petit polyèdre composé d'un demi-octaèdre régulier flanqué d'un tétraèdre régulier : le *sabot*.

Ce sabot est un polyèdre à 5 faces, un pentaèdre, dont les faces sont :

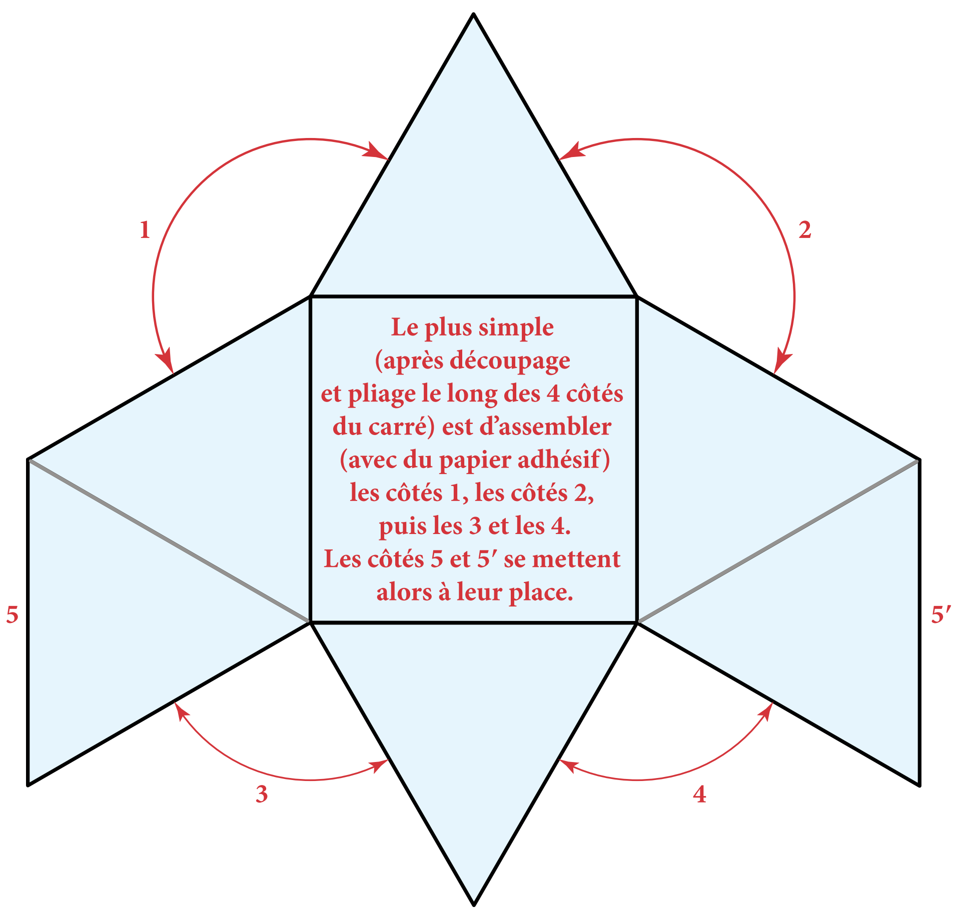
- un carré,
- 2 triangles équilatéraux,
- 2 losanges.

On le reconnaît, ci-dessous, posé sur sa face carrée, avec ses deux losanges latéraux, qui lui donnent un air penché : à gauche, le demi-octaèdre (une pyramide à base carrée) et, à droite, le tétraèdre régulier qui a été rajouté.



En marquant en bleu pointillé les diagonales des deux losanges (qui étaient deux arêtes du tétraèdre) on voit bien comment deux faces triangulaires se retrouvent dans un même plan pour former une face losange.

Évariste s'était fabriqué 8 exemplaires de sabots à partir d'un patron, ci-dessous reproduit (pour que vous puissiez en construire vous-même).



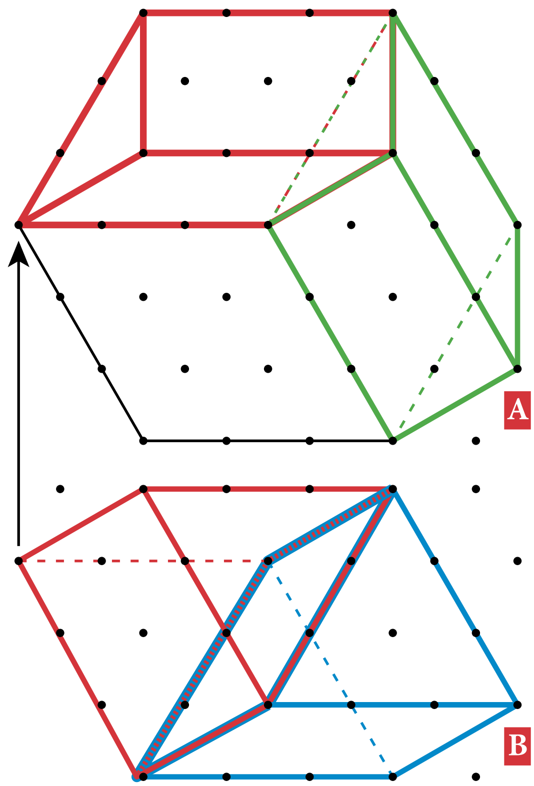

**Notes :**

- En grec ancien *dodéca* = douze, *octa* = huit, *penta* = cinq, *tétra* = quatre, *poly* = plusieurs, *èdre* = face, d'où les noms des polyèdres : dodécaèdre, octaèdre, pentaèdre, tétraèdre.
- Un losange a 4 côtés égaux. Un carré est donc aussi un losange (et c'est aussi un rectangle).

Comment Évariste a-t-il trouvé son assemblage de 8 sabots ? C'est difficile à dire, mais nous décrivons ici l'une des solutions possibles.

En essayant de garder deux sabots tous les deux posés sur une face losange, l'assemblage de la figure A peut attirer l'attention : quatre de ses « bords » dessinent en effet (sur le plan de la base) deux-tiers d'hexagone.

Chaque figure est une vue de haut, les arêtes cachées étant en pointillé, en supposant les sabots posés sur une surface plane hexagonale ; ce n'est donc pas une perspective.

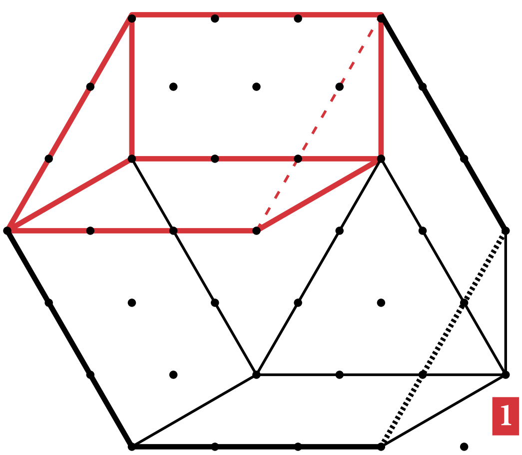

A

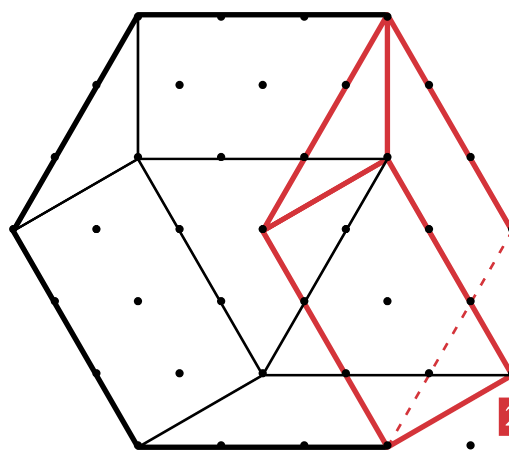
B

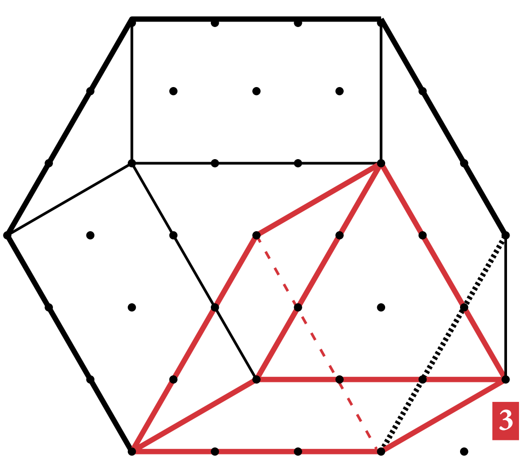
Il se trouve que l'on peut lui rajouter un autre assemblage de deux sabots formant un parallélépipède (figure B).

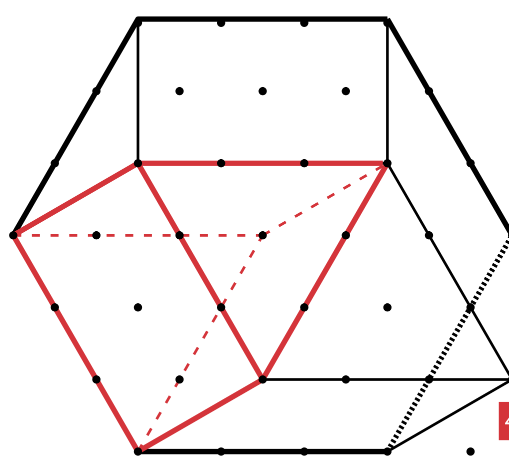
Les 4 figures (1, 2, 3, 4) montrent comment se positionne alors chacun des quatre sabots.

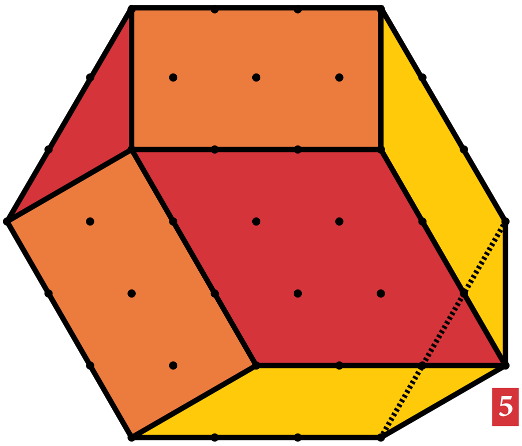
L'assemblage obtenu avec ces quatre sabots forme un polyèdre à huit faces qui se pose, assez naturellement, sur sa grande face hexagonale (figure 5).


1


2

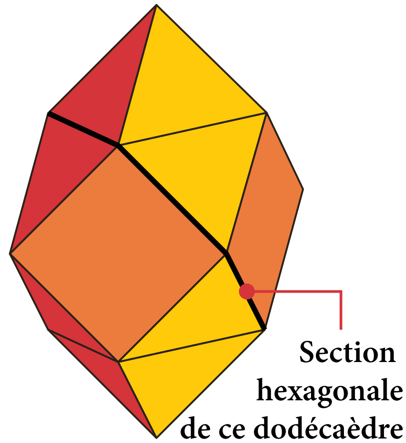

3


4



5

Évariste s'aperçut alors que deux exemplaires de cet octaèdre pouvait s'assembler le long de l'hexagone pour former un polyèdre à 12 faces (deux paires de triangles dans un même plan ne formant que deux faces losanges).



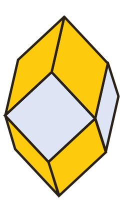

Ce polyèdre ne pouvait être que celui évoqué par la note de 1942 du Palais de la Découverte.

L'étude de ce polyèdre montre qu'il n'était finalement pas si mystérieux que cela ! On peut en effet le construire d'une manière bien plus simple qu'en assemblant 8 sabots. Il est par ailleurs très semblable au ***dodécaèdre rhombique*** que Kepler avait étudié en 1610.

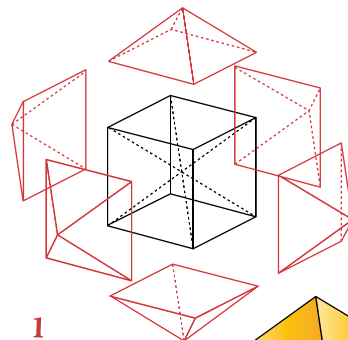
• La construction du dodécaèdre de Kepler est élémentaire : Prenez un cube et imaginez son centre ; le cube est composé de 6 pyramides à base carrée, de sommet ce centre ; rajoutez au cube les 6 symétriques de chacune de ces pyramides par rapport à leur base ; vous obtenez le dodécaèdre rhombique de Kepler, en français le *douze-losanges* ! (Voir dessins 1 et 2.)

• Maintenant, remplacez le cube par un pavé droit, dont deux faces opposées ont leurs 8 côtés de longueur unité, les 4 autres côtés ayant pour longueur $\sqrt{2}$. La même construction que précédemment donne naissance à un autre « douze-losanges », un *dodécaèdre rhombique allongé*. (Voir dessins 3 et 4.)

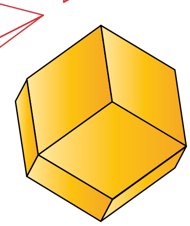
Nous pouvons aussi le nommer *rugbyque*, car il est à celui de Kepler ce qu'un ballon de rugby est à un ballon de football. Le dodécaèdre rugbyque est un polyèdre ayant 14 sommets (les 8 sommets du pavé original + les 6 sommets des pyramides rajoutées), 24 arêtes et 12 faces.
Il se trouve en effet que les 24 faces triangulaires initiales ($6 \times 4$) se groupent naturellement deux à deux dans un même plan pour former un losange.



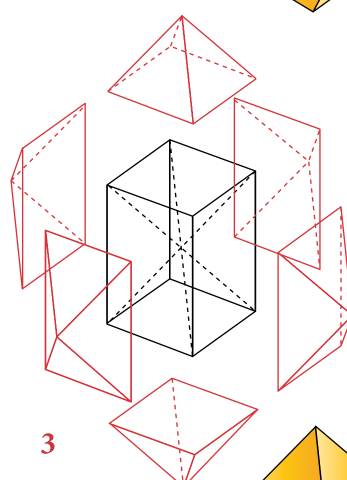
Comme celui de Kepler, ce dodécaèdre a toutes ses faces qui sont des losanges ; mais quatre de ces losanges sont des carrés !



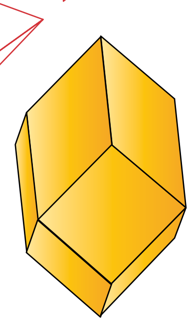
1



2



3



4

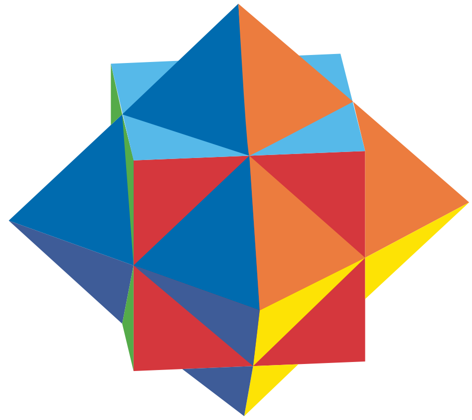
Dans cette marge, les figures sont dessinées en perspective.

## Le cuboctaèdre

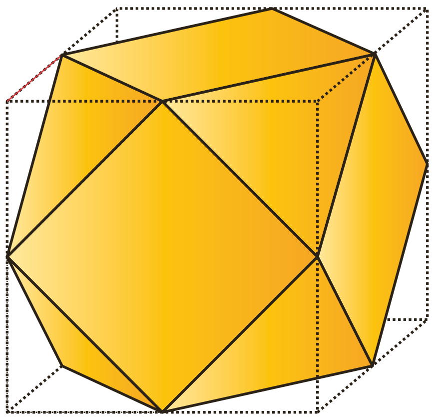
Pour construire un cuboctaèdre, on peut partir d'un cube et d'un octaèdre régulier ayant leurs 12 milieux d'arêtes en commun.

Le solide intersection des volumes du cube et de l'octaèdre régulier est alors un *cuboctaèdre*.

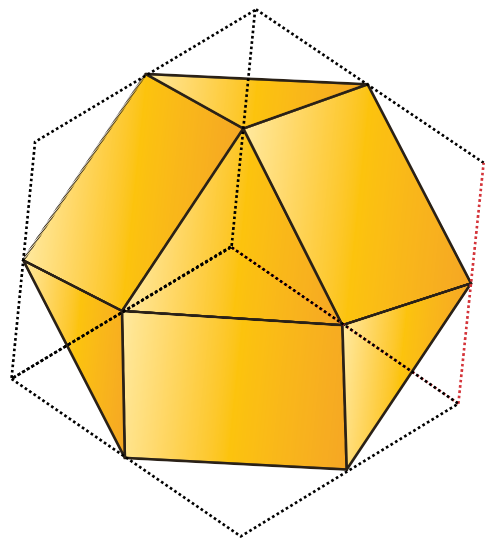
C'est comme si on avait tronqué chaque coin du cube, ou de l'octaèdre, par le plan passant par les milieux des arêtes adjacentes.



Voici une vue d'un cuboctaèdre lorsque il est posé sur une face carrée, et lorsque il est posé sur une face triangulaire :



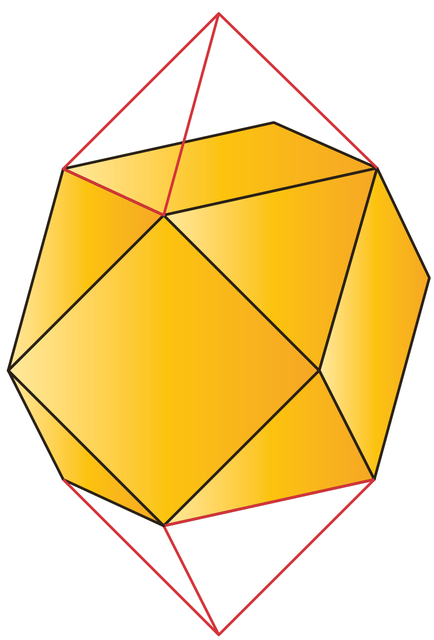
En pointillé, le cube dont on a tronqué les sommets.



On peut obtenir le *dodécaèdre rugbyque* à partir d'un cuboctaèdre en remplaçant deux faces carrées opposées par les 4 faces triangulaires équilatérales de la pyramide construite sur chacune de ces deux bases carrées.

On retrouve bien, en effet, un solide à 12 faces, en rajoutant ces deux chapeaux pyramidaux au cuboctaèdre ! En effet, il y a deux faces carrées en moins et aucune face en plus car chacun des 8 triangles ajoutés forme un losange avec un triangle du cuboctaèdre initial.

**Le dodécaèdre rugbyque n'est rien d'autre qu'un cuboctaèdre à deux chapeaux !**



Voir aussi « À la recherche d'un puzzle oublié » de Guillaume Reuiller dans la revue n° 440 du Palais de la Découverte, janvier-mars 2023.