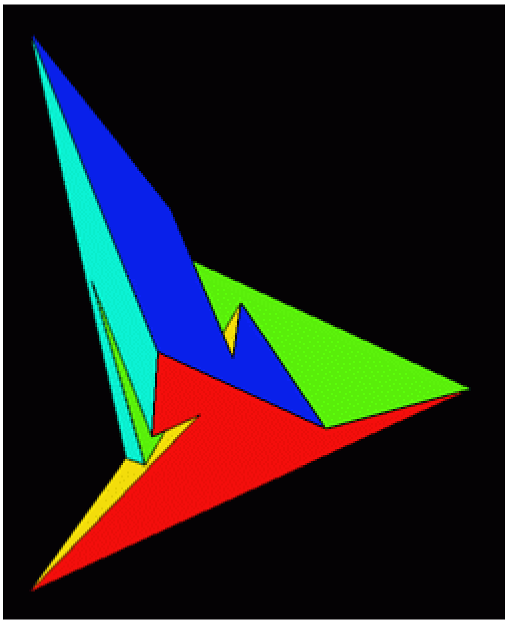
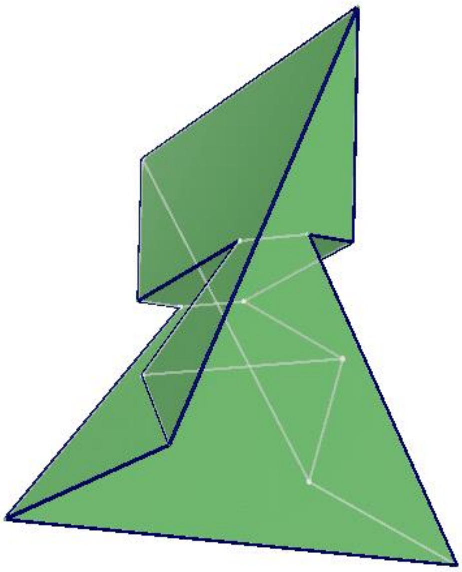
Le polyèdre de Szilassi

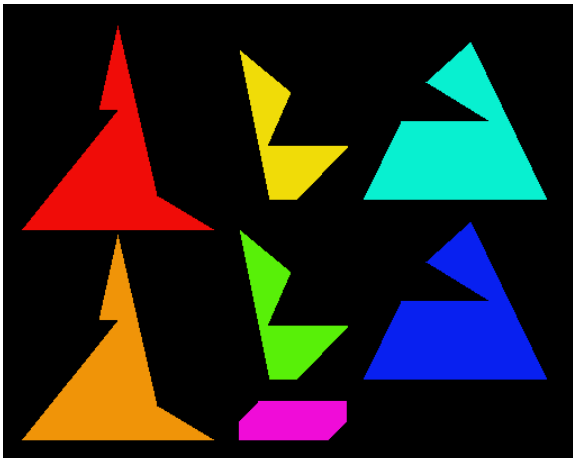
Ce polyèdre à 7 faces, ou heptaèdre, a un trou, 14 sommets et 21 arêtes.
Chacune des 7 faces a une arête commune avec les 6 autres !

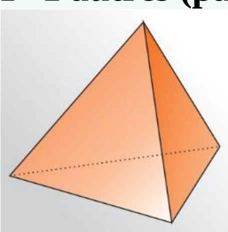
Lajos Szilassi est un mathématicien hongrois né en 1942.

Professeur à l'université de Szeged (ville de 160 000 habitants, à l'extrême sud de la Hongrie), il découvrit le polyèdre qui porte son nom en 1977 ; et il le décrit dans son article :
Szilassi, L. (1986) *Les toroïdes réguliers*,
Topologie structurale, n°13, pages 69-80 [Montréal].

Martin Gardner reproduisit les faces de ce polyèdre dans *"In Which a Mathematical Aesthetic is Applied to Modern Minimal Art", Mathematical Games, Scientific American (1978).*

Dans ce doc, nous appellerons **szilassien, tout polyèdre à F faces, dont chacune touche les F–1 autres (par une arête).**

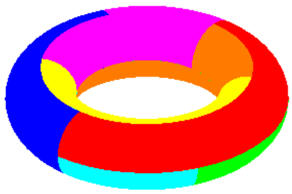


Pour F=4, le tétraèdre est un polyèdre szilassien : chacune des 4 faces touche bien les 3 autres.

Si on veut colorier chaque face de sorte que deux faces ayant une arête commune soient de couleurs différentes, alors il faut utiliser 4 couleurs.

Le théorème des 4 couleurs, conjecturé en 1852 mais démontré (avec l'aide d'un ordinateur) en 1976, nous dit que **toute carte tracée sur un plan ou une sphère peut se colorier avec 4 couleurs ou moins.**
Aucun *brave* polyèdre (polyèdre *pouvant se déformer par gonflement en une sphère*) szilassien ne peut donc avoir plus de 4 faces car, alors, le théorème des 4 couleurs serait faux.

Il se trouve que, sur un tore, toute carte peut être tracée en utilisant au plus 7 couleurs (deux pays limitrophes étant de couleurs différentes) ; c'est le *théorème des 7 couleurs, sur le tore*.
D'où la recherche, par Szilassi, d'un polyèdre szilassien à 7 faces parmi les polyèdres ayant un trou…



En fait, on peut montrer par des manipulations de la formule de Descartes-Euler-Poincaré *(S–A+F= 2–2g, où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, F le nombres de faces et g le nombres de trous, d'un polyèdre)*, que les seuls polyèdres szilassiens ayant moins de 6 trous sont soit un tétraèdre (A=4, S=6, F=4, g=0) soit un polyèdre de Szilassi (A=21, S=14, F=7, g=1).
Le polyèdre szilassien « suivant » ne pourrait être qu'un dodécaèdre à 6 trous (A=66, S=44, F=12, g=6), mais on n'en a encore vu aucun.

On trouve de bons renseignements sur la représentation de ce polyèdre sur le site www.mathcurve.com en particulier …

... Les coordonnées des sommets et des faces d'un heptaèdre de Szilassi
(calculées par Jean Lefort) :
Sommets : a=[-1.2,0,1.2] b=[1.2,0,1.2] c=[0,-1.26,-1.2] d=[0,1.26,-1.2] e=[0.2,-0.5,-0.8]

f=[-0.2,0.5,-0.8] g=[-0.375,-0.375,-0.3]

h=[0.375,0.375,-0.3] i=[0.45,-0.25,0.2] j=[-0.45,0.25,0.2]

k=[-0.7,0,0.2] l=[0.7,0,0.2] m =[-0.7,-0.25,0.2] n=[0.7,0.25,0.2].

Faces : [i,g,e,b,a,m], [j,h,f,a,b,n], [g,h,j,k,c,e],

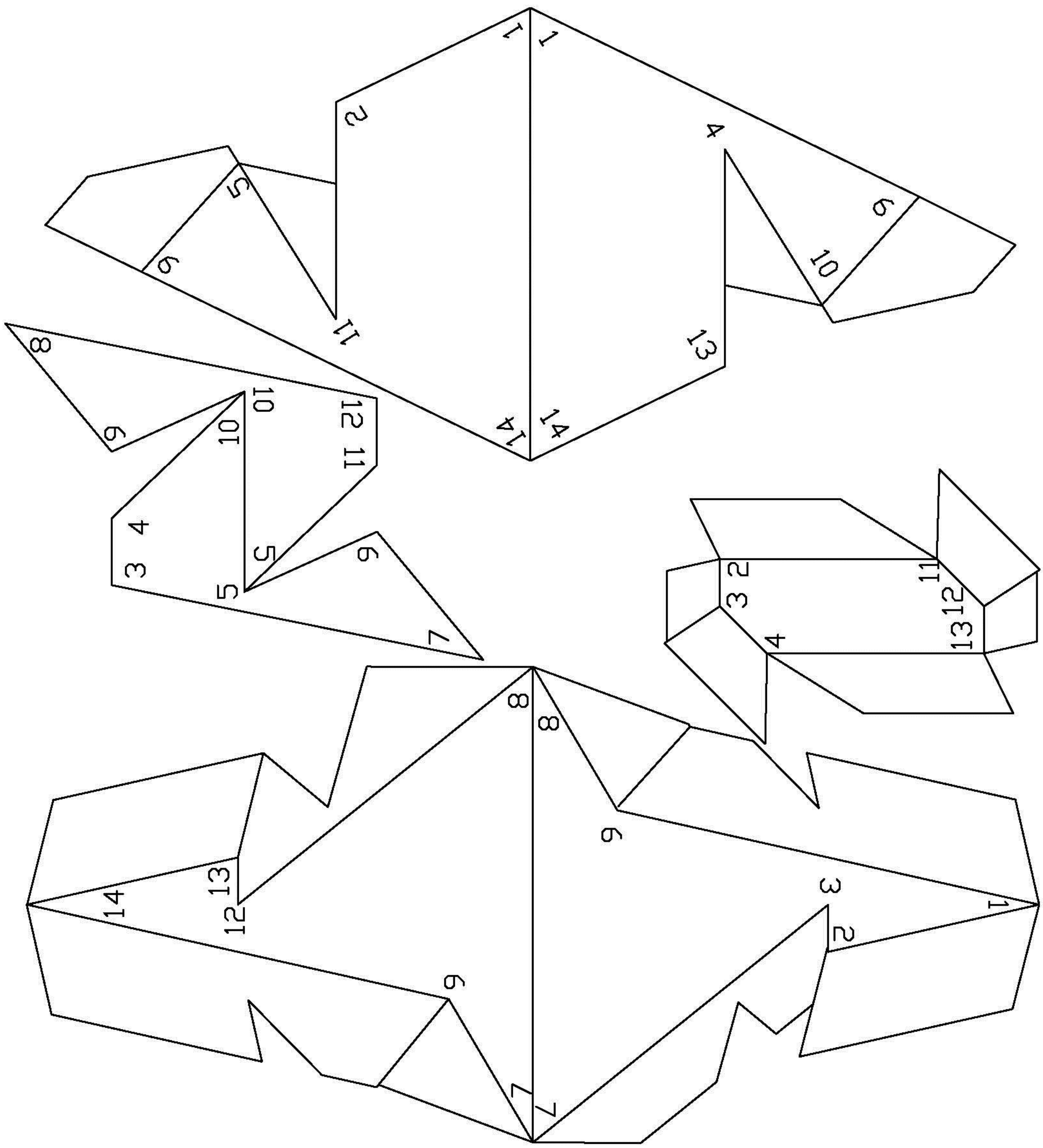
[h,g,i,l,d,f], [f,d,c,k,m,a], [i,l,n,j,k,m], [c,e,b,n,l,d].

Un patron d'un heptaèdre de Szilassi, par Jean-Jacques Dupas

Six faces sont deux à deux isométriques, la septième est un hexagone symétrique.

Les numéros permettent de bien associer les sommets les uns aux autres.

À l'extérieur des faces polygonales, les « languettes » se collent sous les arêtes correspondantes des autres faces (en les pliant de manière à voir les numéros des sommets).



Grâce aux renseignements de la page précédente, certains amis du Kangourou ont fait réaliser, dans leur jardin, un polyèdre de Szilassi assez spectaculaire…

Il est ici vu des quatre points cardinaux ; on y reconnaît bien le berlingot dans lequel il pourrait être « circonscrit ».