1. Réponse **E.**
L'équation $x^2 - 2004 = 0$ a deux solutions : $-\sqrt{2004}$ et $\sqrt{2004}$.
Le plus petit nombre réel vérifiant cette équation est donc $-\sqrt{2004}$.

2. Réponse **D.** La pyramide a 17 faces dont une base et par conséquent 16 faces séparées par 16 arêtes issues du sommet. La base a donc 16 côtés. Donc il y a en tout $16 + 16 = 32$ arêtes.

3. Réponse **C.** On a acheté $m + n$ stylos pour un coût de $nm + mn = 2mn$, alors le coût moyen d'un stylo est : $\dfrac{2mn}{m+n}$.

4. Réponse **D.** Le troisième angle de STU est $180° - (30° + 75°)$ soit 75°. Donc STU est isocèle : SU = TU. Or TU = SV, donc SU = SV et SUV est également isocèle de base UV. Alors :
$\widehat{SUV} = \widehat{SVU} = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$.

5. Réponse **D.** La moyenne des tentacules est $3 \times 1\% + 2 \times 97\% + 1 \times 2\% = 199\% = 1{,}99$. Tout martien ayant sur sa tête deux ou trois tentacules en aura plus que la moyenne.
Il y en a donc $97\% + 1\% = 98\%$.

6. Réponse **A.** Dans ce carré de côté s, il y a s^2 petits carrés de côté 1. Dans chaque colonne, 2 carrés ont été coloriés sauf dans celle du milieu (car s est impair) où un seul a été colorié ; donc il y a $2s - 1$ carrés coloriés. Par conséquent l'aire de la surface blanche est $s^2 - (2s - 1) = s^2 - 2s + 1$ soit $(s - 1)^2$.

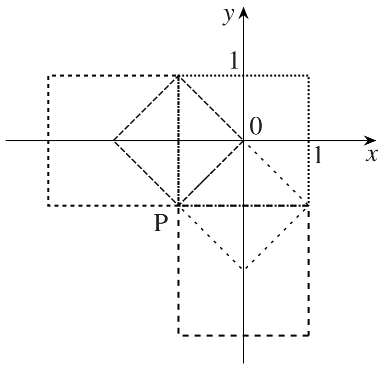
7. Réponse **D.** Tous les nombres à deux chiffres terminés par 0, 1, 5 et 6 réalisent cet exploit. On a 9 choix pour le premier chiffre (de 1 à 9) à chaque fois. Il y a donc $4 \times 9 = 36$ nombres possibles.

8. Réponse **C.** Si le carré $\mathscr{C}$ a pour côté n, son aire n^2 est la somme des aires des 17 petits carrés de côté 1 et de l'aire m^2 du 18$^{\text{ème}}$ carré. Donc $n^2 - m^2 = 17$ c'est-à-dire $(n - m)(n + m) = 17$. Comme 17 est un nombre premier la seule possibilité est $n + \mathrm{m} = 17$ et $n - m = 1$ et donc $2n = 18$ soit $n = 9$. Donc l'aire du carré $\mathscr{C}$ est 81.

9. Réponse **C.** La première condition $(xy \leqslant 0)$ impose que tous les points se trouvent dans les 2^{e} quadrant ($x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$) ou 4^{e} quadrant ($x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$). Seules les propositions C et A réalisent cela. De plus $(x^2 + y^2 = 4)$ tous les points appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2. C est donc la bonne représentation graphique.

10. Réponse **C.** Dans le pré, se trouvaient 15 moutons (à quatre pieds) et n bergers (à deux pieds), soit en tout un nombre de pieds égal à $P = 4 \times 15 + 2n$.
Lorsque la moitié des bergers a emmené le tiers des moutons, il reste :
$\dfrac{n}{2} \times 2 + 10 \times 4 = 50$ pieds. D'où $n = 10$. Donc, à l'origine, il y avait :
$P = 4 \times 15 + 2 \times 10 = 80$ pieds.

11. Réponse **D.** Le dessin ci-contre montre les cinq carrés ayant un sommet en P(– 1 ; – 1) et au moins un des axes de coordonnées pour axe de symétrie. Il est facile de voir que ce sont les seuls.



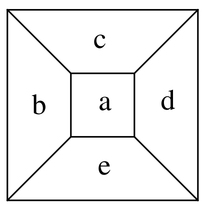
12. Réponse **B.** Pour être sûr que le produit soit divisible par 4, il suffit de lui imposer de contenir deux nombres pairs. Pour être certain que cela soit réalisé, dans le pire des cas, il faut prendre les 50 nombres impairs et 2 nombres pairs. C'est donc 52 cartes qu'il faut tirer.

13. Réponse **C.** Les triangles rectangles cherchés ont pour hypoténuse un diamètre du cercle circonscrit du polygone régulier. Il y a 7 diamètres joignant 2 sommets opposés du polygone et chaque diamètre permet de former 12 triangles rectangles : $7 \times 12 = 84$.

14. Réponse **E.** L'égalité des deux angles de 60° prouve que les droites (IH) et (JL) sont parallèles donc que le quadrilatère HIJL est un trapèze de petite base 1 et de grande base 2. Sa hauteur est celle du triangle équilatéral HIJ de côté 2 et vaut $\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$ soit $\sqrt{3}$.

L'aire du trapèze est donc $\dfrac{(1+2)\times\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

15. Réponse **C.** Soient a, b, c, d, e et f les entiers figurant sur les faces. Le nombre f est celui de la face cachée dans la représentation ci-contre.

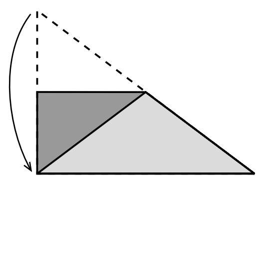


La somme des nombres placés aux sommets du cube est :

$$\begin{aligned} S &= abc + abe + adc + ade + fbc + fbe + fdc + fde \\ &= ab(c+e) + ad(c+e) + fb(c+e) + fd(c+e) \\ &= a(b+d)(c+e) + f(b+d)(c+e) \\ &= (a+f)(b+d)(c+e) = 70 = 2 \times 5 \times 7. \end{aligned}$$

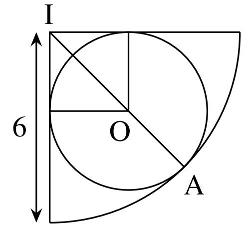
Les entiers sont non nuls. Donc aucun des trois facteurs n'est égal à 1. Il s'en suit que les trois facteurs sont 2, 5 et 7. Leur somme, $(a+f) + (b+d) + (c+e)$, est la somme des six entiers, qui vaut donc 14.

16. Réponse **C.** L'aire du triangle rectangle initial est 24 cm^2 ($24 = 6\times8/2$). Le polygone obtenu en le pliant mesure donc moins de 24 cm^2 et au moins la moitié (12 cm^2). Mais ce ne peut être exactement la moitié car le triangle initial aurait eu un axe de symétrie. Ce ne peut donc être que 18 cm^2 que l'on obtient en pliant, par exemple, comme sur le dessin ci-contre.



17. Réponse **E.** En appelant R le rayon du cercle Γ, nous avons $IO = R\sqrt{2}$ et $IA = IO + OA = R\sqrt{2} + R = R(1+\sqrt{2}) = 6$.

$$R = \frac{6}{1+\sqrt{2}} = 6(\sqrt{2}-1).$$



18. Réponse **B.** Si dans une suite géométrique $a_3 < a_2 < a_4$, alors la raison q de la suite est négative. En effet si $a_3 < a_2$, deux cas sont possibles : $0 < q < 1$ (mais si q est positif alors $a_4 < a_3 < a_2$) ou $q < 0$ (ce qui est le cas).
De plus nécessairement $a_3 < 0$ donc $a_2 > 0$ et $a_4 > 0$ également.
La seule inégalité qui vérifie cela est B.

19. Réponse **A.** Soit b le pourcentage des votants pour le parti brocoliste. Comme ils ont tous mangé des brocolis cela fait déjà b pour les mangeurs de brocolis. Il reste $(1-b)$ des votants pour les autres partis dont 10% ont déjà mangé des brocolis. Donc finalement le pourcentage de mangeurs de brocolis est :
$b + (1-b) \times 0{,}1 = 0{,}9b + 0{,}1$ qui représente 46% soit 0,46 des votants d'après l'énoncé.
D'où l'équation $0{,}9b + 0{,}1 = 0{,}46$ qui a pour solution $b = 0{,}40 = 40\%$.

20. Réponse **A.** L'aire du triangle équilatéral de côté 4 vaut :
$$2\sqrt{3} \times 4 \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}.$$
En appelant r le rayon cherché, l'aire du secteur de rayon r et d'angle $\pi/3$ est $\pi r^2/6$. En écrivant que cette aire est la moitié de l'aire du triangle, nous obtenons $\pi r^2/6 = 2\sqrt{3}$.
D'où $r^2 = \dfrac{12\sqrt{3}}{\pi}$, donc $r = \sqrt{\dfrac{12\sqrt{3}}{\pi}}$.

21. Réponse **C.** Pour transformer $\mathscr{C}_g$ en $\mathscr{C}_f$, on peut d'abord effectuer une translation horizontale de vecteur $(-2\,;0)$ qui transforme la fonction en $x \mapsto g(x+2)$ puis une symétrie par rapport à l'axe des x qui transforme la fonction en $x \mapsto -g(x+2) = f(x)$.

22. Réponse **A.** Le nombre de 1 ajoutés dans la case k est égal au nombre de diviseurs de k. $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. Le nombre 120 possède $4 \times 2 \times 2$, soit 16 diviseurs. Le nombre 16 est donc écrit, à la fin, dans la 120ème case.

23. Réponse **B.** Si l'on choisit 3 points parmi 18 le nombre de triangles obtenus est
$$C_{18}^{3} = \binom{18}{3} = \frac{18 \times 17 \times 16}{2 \times 3} = 816.$$
Mais il faut retirer les triangles aplatis obtenus sur chaque côté en choisissant 3 points parmi 7, c'est-à-dire $\binom{7}{3}$, résultat qu'il faut multiplier par trois puisqu'il y a trois côtés donc :

$3\times\dfrac{7\times6\times5}{2\times3} = 105.$
Ce qui fait $816-105=711$.

24. Réponse **B.** Dans le système décimal un nombre qui s'écrit *abc* vaut $100a+10b+c$.
En additionnant les 6 permutations *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, le total obtenu est :
$200(a+b+c)+20(a+b+c)+2(a+b+c)=222(a+b+c)$.
Ici, on a donc $222(x+y+z)=1554$, donc $x+y+z=7$.
$0<x<y<z$ impose $x=1$ (car si $x\geqslant2$ alors $y\geqslant3$ et $z\geqslant4$, et donc $x+y+z\geqslant9$ est trop grand).
Si $x=1$ alors $y+z=6$ et ensuite $y=2$ et $z=4$ est la seule solution possible (si $y=3$ alors $z=3$).

25. Réponse **6**
Les nombres cherchés sont multiples de 12, donc de 4 ; leurs deux derniers chiffres forment un nombre multiple de 4 et leur somme est strictement inférieure à 6. Ces deux derniers chiffres ne peuvent donc être que 00, 04, 12, 20, 32 ou 40.
Les nombres cherchés, strictement inférieurs à 2004 et à 4 chiffres, ont 1 comme premier chiffre, et on trouve le deuxième chiffre de façon que la somme des chiffres soit 6. D'où les 6 nombres :
1500, 1104, 1212, 1320, 1032, 1140.

26. Réponse **4**
La technique de multiplication « à la main » montre que le dernier chiffre non nul d'un produit est le même que celui du produit des derniers chiffres non nuls de chaque facteur… sauf s'il contient le produit 2×5 (auquel cas, il faut y regarder de plus près ; par exemple, le dernier chiffre non nul de 12×15 ou de 44×45 est 8 !).
- Le produit des dix nombres se terminant par 0 a pour dernier chiffre non nul celui de $1\times3\times4\times6\times7\times8\times9$, soit 8.
- Le produit des nombres des dix dizaines, ne se terminant pas par 0 ou par 2 ou par 5, se termine aussi comme ce même produit. Cela donne 8^{10}, dont le dernier chiffre est 4 (la suite des derniers chiffres des puissances de 8 est 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, 8, 4).
- Restent les produits :
$12\times15\times22\times25 = 99000$, dont le dernier chiffre non nul est 9
32×35, dont le dernier chiffre non nul est 2
42×45, dont le dernier chiffre non nul est 9
52×55, dont le dernier chiffre non nul est 6
62×65, dont le dernier chiffre non nul est 3
72×75, dont le dernier chiffre non nul est 4
82×85, dont le dernier chiffre non nul est 7
92×95, dont le dernier chiffre non nul est 4.
Pour ces produits, il faut donc effectuer $9\times2\times9\times6\times3\times4\times7\times4$, dont le dernier chiffre est 2.
Finalement, le produit de $8\times4\times2$ se termine par 4 ; c'est le chiffre cherché.

