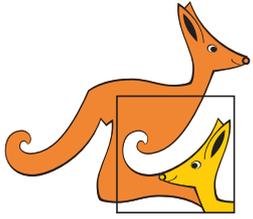


KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES



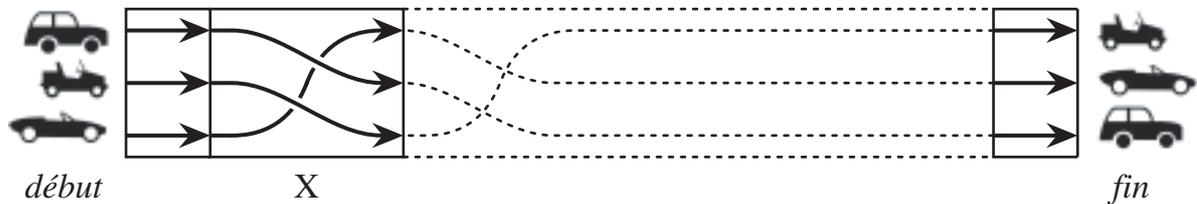
L'association *Kangourou Sans Frontières* organise le jeu-concours *Kangourou* pour plus de quatre millions de participants dans le monde.

Mars 2007 — Durée : 50 minutes

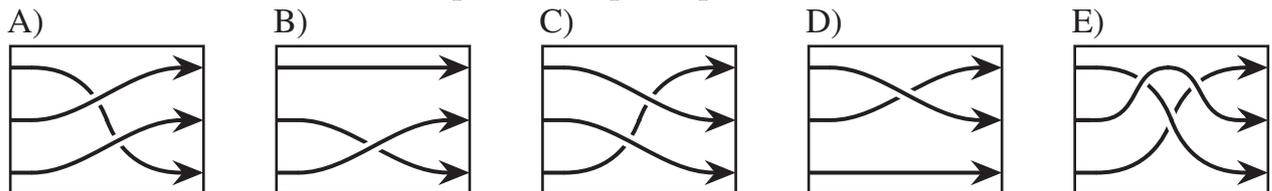
Épreuve Étudiants, sujet S

- L'épreuve est individuelle. **Les calculatrices sont interdites.**
 - **Il y a une seule bonne réponse par question.** Les bonnes réponses rapportent 3, 4 ou 5 points selon leur difficulté (premier, deuxième et troisième tiers de ce questionnaire), mais une réponse erronée coûte un quart de sa valeur en points. Si aucune réponse n'est donnée, la question rapporte 0 point.
 - Il y a deux manières de gagner des prix : « crack » (au total des points) et « prudent » (au nombre de réponses justes consécutives depuis la première question).
- Les classements sont séparés pour les Terminale S et pour les étudiants (Bac+).**

1 Claude a construit un circuit automobile.



Il a remarqué que l'ordre des voitures à la fin n'était pas le même qu'au début. Quel élément doit-il mettre à la place de X pour, qu'à la fin, il retrouve l'ordre initial ?



2 Anna, Béa et Clara ont ensemble 30 billes. Si Béa en donne 5 à Clara, Clara 4 à Anna et Anna 2 à Béa ; elles en auront chacune le même nombre. Combien Anna avait-elle de billes au début ?

A) 8 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

3 Combien écrira-t-on de chiffres si l'on écrit tous les nombres de 1 à 100 ?

A) 100 B) 150 C) 190 D) 192 E) 200

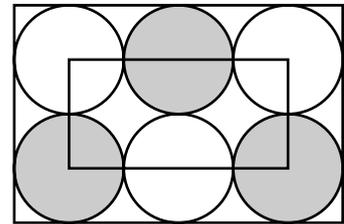
4 On pense que, pour tracer les angles droits, les Égyptiens utilisaient une corde à deux nœuds. Supposons que la corde ST mesure 12 unités de longueur et que le premier nœud X soit à 3 unités de S.



On veut que l'angle en X soit droit lorsque les extrémités S et T sont confondues et que la corde est tendue sur les trois segments délimités par les deux nœuds. À quelle distance le deuxième nœud est-il de l'extrémité T de la corde ?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) autre réponse

- 5 La figure représente six cercles, de même rayon, tangents aux côtés d'un rectangle. Le petit rectangle a pour sommets les centres de quatre de ces cercles (voir dessin); son périmètre est 60 cm. Quel est le périmètre du grand rectangle ?

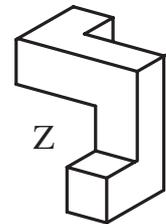
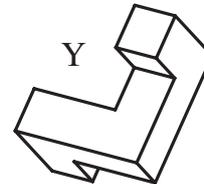
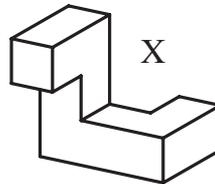
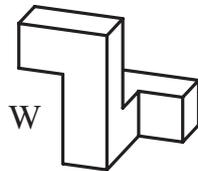
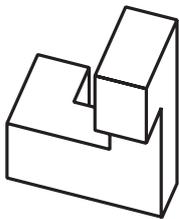


- A) 160 cm B) 140 cm C) 120 cm
D) 100 cm E) 80 cm

- 6 Pour réussir son test d'entrée à l'Académie, Pierre doit répondre correctement à 80 % des questions. Il est sûr d'avoir bien répondu à 10 des 15 premières questions. S'il répond correctement aux questions restantes, il sera sûr d'avoir réussi son test. Combien le test comporte-t-il au minimum de questions ?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

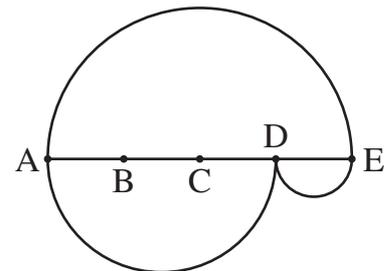
- 7 L'objet dessiné ci-contre à gauche est composé de sept petits cubes. Que peut-on voir en faisant tourner cet objet dans l'espace ?



- A) W et Y B) X et Z C) seulement Y D) aucun des quatre E) W, X et Y

- 8 A, B, C, D, E graduent régulièrement [AE]. Quel est le rapport des longueurs des chemins allant de A à E, le premier étant le demi-cercle de diamètre [AE], le second étant la suite des deux demi-cercles de diamètres [AD] et [DE] ?

- A) 1 : 2 B) 2 : 3 C) 2 : 1
D) 3 : 2 E) 1 : 1



- 9 À partir d'un carré de côté 1, on trace tous les carrés ayant au moins deux sommets communs avec lui. Quelle est l'aire de la surface alors couverte par tous ces carrés ?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

- 10 On a l'égalité $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, où x et y sont des entiers. Combien vaut x ?

- A) 0 B) 3 C) -1 D) 1 E) 2

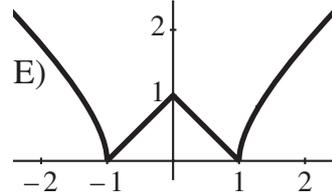
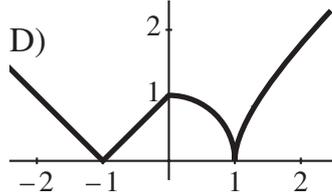
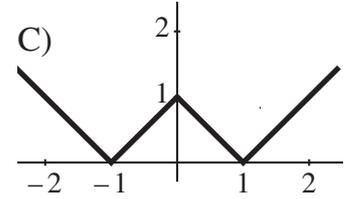
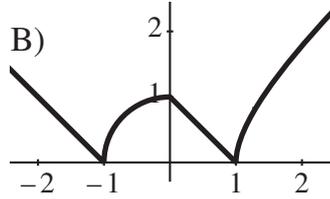
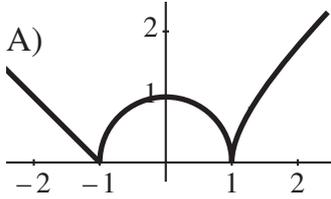
- 11 Combien vaut $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ$?

- A) 1 B) π C) 0 D) 10 E) -1

- 12 Chaque habitant de Trufals-les-Bains ou bien ment toujours, ou bien dit toujours la vérité. On interroge l'habitant X de Trufals-les-Bains, au sujet de l'habitant Y et de lui-même. Il répond qu'au moins l'un d'eux, X ou Y, est un menteur. Laquelle de ces phrases est vraie ?

- A) X = Y. B) X et Y sont des menteurs.
C) X et Y disent toujours la vérité. D) X est un menteur et Y dit la vérité.
E) Y est un menteur et X dit la vérité.

13 Quelle est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{|(1+x)(1-|x|)|}$?



14 La somme de cinq entiers consécutifs est égale à la somme des trois entiers suivants. Quel est le plus grand de ces huit nombres ?

- A) 4 B) 8 C) 9 D) 11 E) un autre nombre

15 Hélène est née le jour du vingtième anniversaire de sa mère. Combien de fois, au plus, l'âge d'Hélène sera-t-il un diviseur de l'âge de sa mère ?

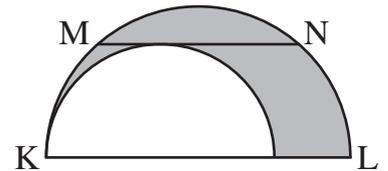
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

16 Dans l'espace muni d'un repère, on considère la sphère de rayon 3 centrée à l'origine. Combien de points de cette sphère ont des coordonnées entières ?

- A) 30 B) 24 C) 12 D) 6 E) 3

17 Deux demi-cercles sont tracés, comme sur la figure. La droite (MN) est parallèle à la droite (KL) et tangente au petit demi-cercle ; la corde [MN] mesure 4. Combien vaut l'aire (grisée) entre les deux demi-cercles ?

- A) π B) $1,5\pi$ C) 2π
D) 3π E) les données sont insuffisantes



18 Le nombre 336, divisé par un entier naturel, donne un reste égal à 2. Quel est le reste de la division du nombre 2007 par ce même entier ?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 100

19 Lequel de ces nombres ne peut pas s'écrire $x + \sqrt{x}$, le nombre x étant entier ?

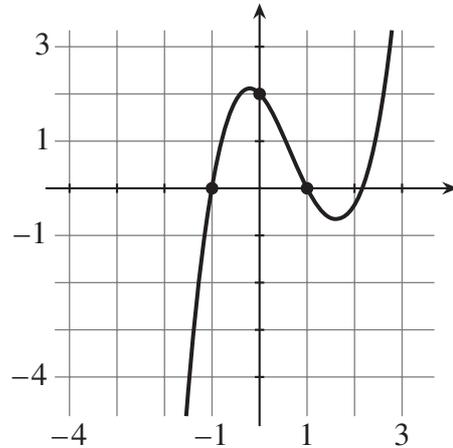
- A) 870 B) 110 C) 90 D) 60 E) 30

20 Jasmine, Karine et Lucas jettent successivement un dé : si Jasmine obtient 1, 2 ou 3, elle gagne ; si Karine fait 4 ou 5, c'est elle qui gagne ; et si Lucas fait 6, c'est lui qui gagne. Ils jouent chacun leur tour en commençant par Jasmine, jusqu'à ce que l'un des trois gagne. Quelle est la probabilité que Lucas gagne ?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{11}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{17}$

- 21** Quel est l'angle aigu d'un losange dont le côté, c , est moyenne géométrique des diagonales, d_1 et d_2 ? (On a donc $c^2 = d_1 d_2$.)
 A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

- 22** La figure montre la représentation graphique d'une fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
 Combien vaut b ?



- A) -4
 B) -2
 C) 0
 D) 2
 E) 4

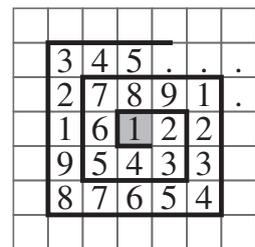
- 23** Une fête réunit 5 amis. Chacun donne un cadeau à un seul autre et chacun reçoit un cadeau d'un seul autre. De combien de manières une telle distribution est-elle possible ?
 A) 5 B) 10 C) 24 D) 44 E) 120

- 24** On écrit la suite croissante des nombres qui sont soit des puissances de trois soit des sommes de puissances de trois deux à deux différentes : 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ...
 Quel est le centième élément de cette suite ?
 A) 150 B) 981 C) 1234 D) 2401 E) 3^{100}

Pour départager d'éventuels premiers nationaux ex æquo, le Kangourou pose deux questions subsidiaires.

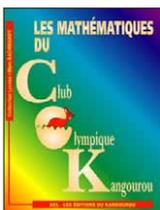
- 25** Combien de nombres entiers à deux chiffres sont tels que le carré de la somme de leurs chiffres soit égal à la somme des chiffres de leur carré ?

- 26** Les chiffres de la suite 123456789123456789... remplissent en spirale les cases d'une feuille quadrillée en commençant par la case grisée (comme indiqué sur la figure). Quel chiffre est écrit dans la case située 100 cases au-dessus de la case grisée ?



© Art Culture Lecture-les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 4 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé.
 « Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »



Librairie du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet :

<http://www.mathkang.org/catalogue/>

