Finales Kangourou – 2007

Solutions

Questions	Benjamins	Questions	Cadets	Questions	Juniors
1	D	1	D	1	E
2	D	2	D	2	C
3	C	3	B	3	A
4	C	4	C	4	D
5	B	5	D	5	D
6	D	6	B	6	E
7	D	7	D	7	D
8	A	8	C	8	B
9	A	9	A	9	D
10	84	10	29	10	24

Corrigés Benjamins

1- (D) Le triangle représente le chiffre 1 (seule retenue possible pour une somme de deux nombres à 1 chiffre). La retenue des dizaines, provenant de la somme de trois chiffres, est 1 ou 2. On a donc cercle+1 = 11 ou bien cercle+2 = 11 Le cercle représente un nombre de 1 chiffre, ce qui exclut la première possibilité. C'est donc le chiffre 9. La colonne des unités donne carré+carré+9=21. Donc le carré représente le chiffre 6.
L'addition proposée était 6+6+99=111.

2- (D) Des triangles dessinés sur la figure ont pour aire 1/8, 1/4 (égal à 3/12) ou 1/2. Aucun assemblage d'aire 3/8 n'est un triangle.

3-(C) 1an = 365 jours, donc 10ans(B) > 1000jours (A).
Et 100000 heures(C) > 100000×10 minutes(D) > 1000000×10 secondes(E).
Or 10ans=10×365×24 heures < 10×400×25 heures < 10×100×100 heures ;
donc 10 ans(B) < 100000 heures(C).
La durée la plus grande est donc C.

4-(C) 1 triangle nécessite 3 allumettes et chaque ligne a 2 allumettes de plus que la précédente. Alors n triangles nécessitent $3+2\times(n-1)$ allumettes. Et 2007 triangles nécessitent donc 3+2×2006 allumettes, soit 4015 allumettes.

5-(B) Un multiple de 35 est forcément multiple de 5. Le dernier chiffre est donc un 5 ou un 0. Tous les chiffres étant identiques, ce n'est pas 0. On essaie de diviser successivement par 35 les nombres 555 (reste non nul), 5555 (reste non nul), 55555 (reste non nul) et 555555=35×15873.

6-(D) Au dessus du segment [JK], le demi-disque a une aire égale à celle des deux quarts de disque qui sont au dessous de ce même segment. L'aire grisée est donc la même que celle du rectangle JKML, soit 2×4 cm^2.

7-(D) Les chiffres dont les images-miroir sont aussi des chiffres sont 0 1 2 et 5.
Les deux chiffres de gauche pouvant représenter une heure (de 0 à 23) sont donc :
00 01 02 05 10 11 12 15 20 21 22 .
La surprise apparaît donc 11 fois.

8-(A) Max obtient successivement les restes 1,2,3…,10,0 qui se répètent autant de fois l'un que l'autre jusqu'à 9999 (qui est un multiple de 11). Pour 10000, le reste est 1, et il est donc obtenu une fois de plus que les autres.

9-(A) Remarque préalable : la somme de *n* entiers consécutifs vaut *n* fois le nombre médian.
Intéressons nous au nombre *n* de termes de la somme valant 100.
<u>Si ce nombre *n* est impair</u>
La somme (ici 100) vaut *n* fois le nombre médian, qui est entier. *n* est donc un diviseur impair de 100, soit 5, soit 25.
Avec $n = 5$, on a 20 comme terme médian et la solution **18+19+20+21+22**
Avec $n = 25$, on a 4 comme nombre médian, il faudrait une somme de 25 termes centrée à 4, ce qui est impossible.
<u>Si ce nombre *n* est pair</u>, la somme(ici 100) vaut *n* fois le nombre médian, qui n'est pas entier, mais de la forme *a*/2, avec *a* entier impair.
On a alors 100 = $n \times \frac{a}{2} = \frac{n}{2} \times a$. *n* étant pair, *n*/2 est entier et *a* est donc un diviseur impair de 100, soit 5, soit 25.
Avec $a = 25$ donc $n/2 = 4$ et $n = 8$ on obtient la somme de 8 termes centrée à 12,5 :
9+10+11+12+13+14+15+16.
Avec $a = 5$ et $n/2 = 20$ donc $n = 40$, il faudrait une somme de 40 termes centrée à 2,5, ce qui est impossible.
Il y a donc 2 sommes possibles en tout et pour tout.

Question subsidiaire - (**84**)
Dans la 1° centaine, il y a 123 à 129 (7 nombres)
134 à 139 (6 nombres)
…
189 (1 nombre). Et donc 7+6+5+4+3+2+1=28 nombres.
Dans la 2° centaine, cela commence à 2**34** … et il y a donc 6+5+4+3+2+1=21 nombres.
Dans la 3° centaine, cela commence à 3**45** … et il y a donc 5+4+3+2+1=15 nombres.
Dans la 4° centaine, cela commence à 4**56** … et il y a donc 4+3+2+1=10 nombres.
Dans la 5° centaine, cela commence à 5**67** … et il y a donc 3+2+1= 6 nombres.
Dans la 6° centaine, cela commence à 6**78** … et il y a donc 2+1=3 nombres.
Dans la 7° centaine, il n'y a que 7**89** et il y a donc 1 nombre.
Finalement, cela fait 28+21+15+10+6+3+1=84 nombres.

Corrigés Cadets

1-(D) Le nombre d'arêtes d'un prisme est un multiple de 3 (le nombre de côtés du polygone de base = le nombre d'arêtes latérales). Seul 2007 convient.

2-(D) (1/10 + 1/20)/2 = 3/40 .

3-(B) L'aire grisée vaut $4-\pi$ (aire du carré – aire des quatre quarts de disque).
Comme $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ on a $0{,}85 < 4-\pi < 0{,}86$ et $85 < 100(4-\pi) < 86$.

4-(C) Un multiple de 8 est pair ; le nombre cherché se termine donc par 8.
Un multiple de 9 a la somme de ses chiffres multiple de 9 ; le nombre cherché contient donc neuf 8 (ou dix-huit, ou vingt-sept,…) et au moins un 9.
Le nombre de 10 chiffres 8 888 889 888 est bien divisible par 8 puisque égal à 888 (soit 8×111) plus quelques milliers (et $1000=8\times125$).

5-(D) Une baisse de 51%, c'est une multiplication par 0,49. Or $0{,}49=0{,}7\times0{,}7$. La chose, chacune des deux années, a été multipliée par 0,7 soit un pourcentage de baisse de 30%.

6-(B) Dans la case en bas à gauche, la seule lettre qui convient est a. Du coup, en case centrale, tous sont exclus sauf b. Reste à vérifier que la grille peut être alors entièrement complétée, ce qui se fait facilement.

c	**d**	a	b	**e**
b	e	c	d	a
d	a	b	e	c
e	c	d	a	b
a	b	e	c	**d**

7-(D) Dans la somme donnée, les nombres à partir de 5! sont multiples de 5. Le reste est donc le même que celui de la division par 5 de 1!+2!+3!+4! = 1+2+6+24=33. C'est donc 3.

8-(C) Nommons les nombres sur chaque face : a sur la face du dessus, b, c, d, e sur les faces latérales et f sur la face du dessous.
Doivent alors être additionnés, les produits des nombres écrits sur les 4 sommets de la face du dessus et sur les 4 sommets de la face du dessous :
abc+abe+aed+adc+fbc+fbe+fed+fdc.= a (bc+be+ed+dc) + f (bc+be+ed+dc)= (a+f) (bc+be+ed+dc)
Or (bc+be+ed+dc) est le développement de (b+d)(e+c).
Donc (a+f)(b+d)(e+c) = 70 = 2×5×7.
Les nombres sur chaque face étant strictement positifs, les sommes a+f ; b+d ; e+c sont supérieures ou égales à 2. Comme 2, 5 et 7 sont premiers, la seule façon d'écrire 70 comme produit de trois facteurs plus grands ou égaux à 2 est 2×5×7. Une des sommes vaut 2, l'autre 5 et la troisième 7.
Finalement a+f+b+d+e+c=2+5+7=14.

9-(A) Il faut réassembler les termes : faisons la somme des $n^{\text{èmes}}$ termes de chaque somme entre parenthèses (pour n de 1 à 669) .
$\frac{1+2}{3}+1=2$ $\frac{4+5}{6}+\frac{1}{2}=2$ et plus généralement , pour tout n, $\frac{(3n-2)+(3n-1)}{3n}+\frac{1}{n}=2$
Il y a donc 669 termes tous égaux à 2 . Le résultat est donc 2×669, soit 1338.

Question subsidiaire - (29)
En appelant a et b les côtés des deux plus petits carrés, on trouve successivement, par simple addition :
2b pour le côté du carré d'angle A,
2b+a pour celui d'angle D,
2b+2a pour celui d'angle C,
Le côté du carré d'angle B vaut alors la moitié de a+(2b+2a), soit b+3a/2.
On a alors, d'une part, AB = (2b+a)+(2b+2a)=4b+ 3a ; et puisque AB=32 on trouve **4b+3a=32.**
D'autre part AD= 2b+b+(2b+a)=5b+a et BC=(2b+2a)+(b+3a/2).
Comme AD=BC, on a 10b+2a=6b+4a+3a. Finalement **4b=5a**.
On déduit finalement que 8a=32, donc **a=4**. Et **b=5**. D'où **AD=29**.

Corrigés Juniors

1-(E) $5\times5^x=5^{x+1}$ et donc $x+1=7$, $x=6$.

2-(C) $\frac{37\times73}{100}<\frac{40\times75}{100}$ qui vaut 30. $\frac{64\times46}{100}=29{,}44$ et $\frac{55\times55}{100}=30{,}25$
On peut remarquer qu'il s'agit des produits xy, avec $x+y=110$, dont le maximum est obtenu pour $x=y$ (=55). On peut aussi remarquer que, comme ils sont égaux deux à deux, le seul candidat comme bonne réponse est celui qui est unique.

3-(A) Le résultat est
((((1×2)+1) ×2+1) ×2+1) ×2…avec une suite de dix 2 (et dix couples de parenthèses).
Cela fait $2^{10}+2^9+2^8\ldots+2^2+2$ soit $\frac{2^{11}-1}{2-1}-1=2^{11}-2$

4-(D) Le rapport des aires du petit triangle au grand est 2 ; donc le rapport de leurs côtés est $\sqrt{2}$. On a donc $\frac{a+b}{a} = \sqrt{2}$ d'où $\frac{b}{a} = \sqrt{2} - 1$ et $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

5-(D) Notons x l'aire de chaque quart grisé et y son complémentaire dans un quart de carré. On a $4x + 4y = 1$ (aire du carré) et $4x + 2y = \pi/4$ (aire du disque) .

D'où $4x = \frac{2\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

6-(E) Il y a 5 couleurs. Pour être sûr d'avoir 12 balles de la même couleur, si on a la malchance maximum, on peut avoir pris d'abord 11 balles de chaque couleur, soit 55 balles (et c'est possible car il y a 77-(17+18+19) soit 23 balles blanches ou noires. Mais alors la 56$^{\text{ième}}$ sera obligatoirement la 12$^{\text{ième}}$ de sa couleur.

7-(D) Les côtés du petit triangle hors du carré et dans le grand triangle mesurent 1/2 horizontalement, et 1/3 verticalement (utiliser Thalès sur le quadrillage de points « coupé » par le côté du triangle qui coupe deux côtés du carré). Sa surface est donc 1/12. L'aire de son complément dans le carré est donc 11/12.

8-(B) Soit a, b, c, d, e les cinq nombres dans l'ordre croissant.
La plus petite somme est a+b qui vaut donc 22.
La deuxième plus petite est a+c qui vaut donc 48.
Alors c-b=48–22=26.
On trouve de même, pour les plus grands : e+d=124, e+c=117 et d–c=7.
a+c=48 et d–c=7, donc a+d=55 ; et la troisième plus petite somme (50) qui ne pouvait être que a+d ou b+c est donc b+c.
D'où (c-b)+(b+c)=26+50=76. Alors c=38. Et b=12, puis a=10, **d=45** et e=79.

9-(D) On a $1+(n+1)(n-1) = 1+(n^2-1) = n^2$.
En commençant par la droite, on trouve alors successivement sous la dernière racine :
$1+2003\times2001=2002^2$
$1+2004\times2002=2003^2$
$1+2005\times2003=2004^2$
$1+2006\times2004=2005^2$
$1+2007\times2005=2006^2$ D'où le résultat final : 2006.

Question subsidiaire - (24)
La somme des chiffres d'un nombre de trois chiffres vaut au plus 27 (999). Et 27 divise 999.
Les nombres dont la somme des chiffres vaut 26 sont 998, 989 et 899 (dont les restes de la division par 26 sont 10, 1 et 15).
Les nombres dont la somme des chiffres vaut 25 sont 997 (reste de la division par 25 : 22), 979 (reste de la division par 25 : 4), 799 (reste de la division par 25 : 24), 988, 898 et 889 qui ne sont pas à essayer ; en effet, le reste d'une division est inférieur au diviseur : on ne trouvera donc pas de reste supérieur à 24.