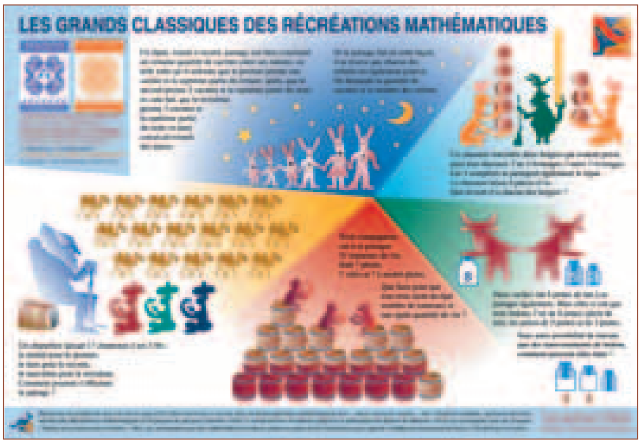
LES GRANDS CLASSIQUES DES RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

Solutions et compléments



Cette affiche a été largement distribuée en France aux professeurs de mathématiques dans le cadre du *jeu-concours Kangourou*.

Pour chacun des cinq problèmes proposés, nous donnons ci-après…

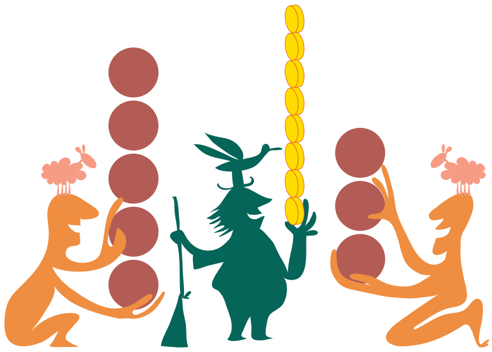
… une version du *texte dans le style des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles*,

… le corrigé du problème,

… d'autres énoncés du même type.

Le partage du repas

Deux Arabes allaient dîner ; l'un avait 5 plats, et l'autre 3, et tous ces plats étaient de même valeur ; un troisième Arabe survenant leur proposa de dîner avec eux, les plats étant mis en commun, promettant d'ailleurs de payer sa part du dîner, ce qu'il fit en donnant 8 deniers. On demande comment les deux autres Arabes doivent se partager ces 8 deniers.



Le problème est trompeur car le nombre de pièces d'or (8) données par le chasseur est exactement égal à la somme des fromages apportés par les bergers (5 + 3). La tentation de faire payer une pièce d'or par fromage à chaque berger est grande.

Mais cela ne serait juste que si le chasseur avait effectivement acheté tous les fromages. Or les deux bergers ont eux aussi mangé une partie de leurs fromages ! Et le problème se complique.

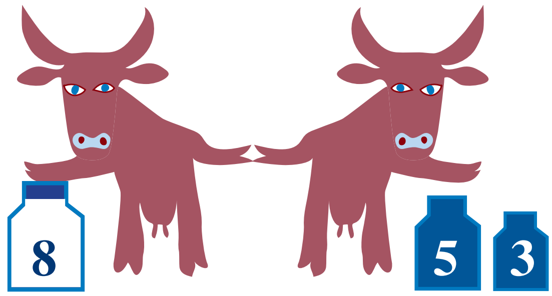
Voici un raisonnement en six étapes :

1. Le chasseur a payé 8 pièces d'or ; c'est donc le prix d'un repas.
2. Les 3 repas valent donc 24 pièces d'or et ils représentent 8 fromages.
3. Chaque fromage peut donc être évalué à 24/8 soit 3 pièces d'or.
4. Un "repas" est constitué de 8/3 fromages.
5. Le berger qui a apporté 5 fromages en a mangé 8/3 et donné 5 – 8/3, soit 7/3. Il doit donc recevoir 7/3 × 3, soit 7 pièces d'or.
6. Le berger qui a apporté 3 fromages en a mangé 8/3 et donné 3 – 8/3, soit 1/3. Il doit donc recevoir 1/3 × 3, soit 1 pièce d'or.

Conclusion : Les 8 pièces d'or doivent donc être partagées en 7 pièces à l'un et 1 à l'autre.

Les transvasements

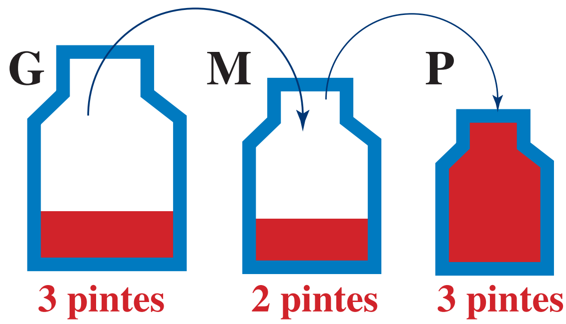
Deux bons compagnons ont 8 pintes de vin à partager entre eux également, lesquelles sont dans un vase contenant justement 8 pintes, et pour faire leur partage ils n'ont que deux autres vases dont l'un contient 5 pintes et l'autre 3.
On demande comment ils pourront partager justement leur vin, ne se servant que de ces trois vases.



Pour bien comprendre le problème posé, il faut se rendre compte des contenances qu'il est possible d'obtenir.

Pour en parler plus vite, appelons G le bidon de 8 pintes (Grand), M celui de 5 pintes (Moyen) et P celui de 3 pintes (Petit).

Ainsi après avoir versé le bidon G dans le bidon M complètement, puis le M dans le P complètement, on se trouve dans cette situation :



Le problème est donc de s'arranger, après divers transvasements, pour obtenir 4 pintes dans l'un des bidons.

Le truc pour réfléchir !

Il y a 3 bidons G, M, P. Mais il suffit de se donner le contenu des bidons M et P pour caractériser la situation.

Ainsi la situation précédente est caractérisée par :

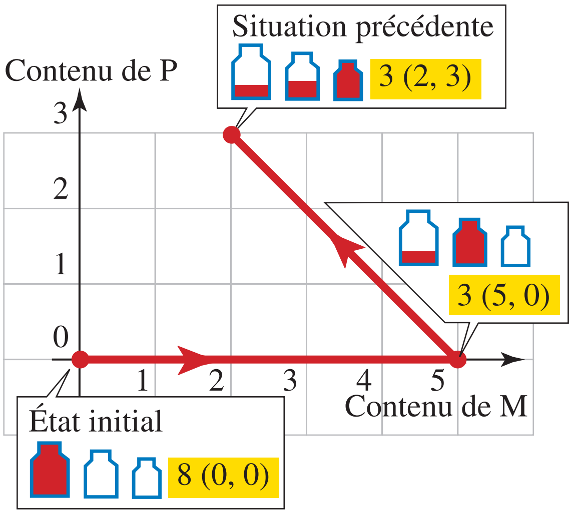
2 pintes dans le bidon M,

3 pintes dans le bidon P,

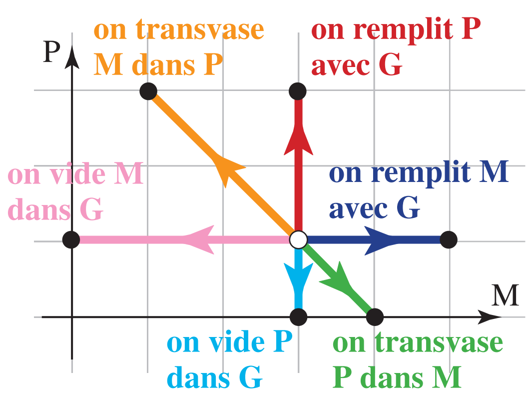
puisqu'on sait alors que le reste du lait (8 – 2 – 3, soit 3 pintes) se trouve dans le bidon G.

On peut même aller plus loin dans le résumé de la situation en ne retenant que deux nombres : (2, 3).

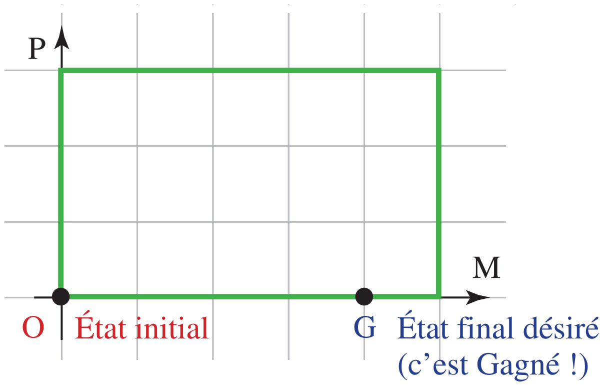
On peut donc représenter la situation par un point de coordonnées (x, y) dans le plan rapporté à un repère ; x étant le contenu du bidon M, y le contenu du bidon P, le contenu du bidon G étant $8 - x - y$.



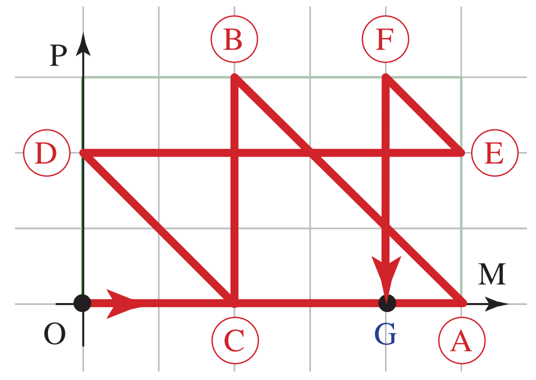
Sublime puissance de la réflexion : on s'aperçoit assez vite que les “transvasements”, qui mènent d'un point sur le quadrillage à un autre, correspondent à six “déplacements” dont voici la représentation :



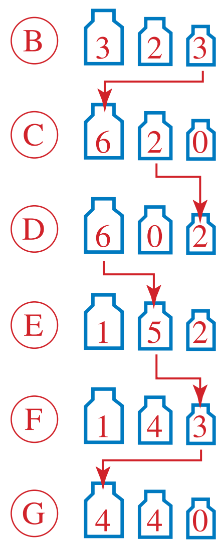
Le problème devient alors beaucoup plus simple à résoudre : il s'agit d'aller du point O au point G en ne suivant que des chemins d'un des 6 types précédents (où les extrémités des flèches sont nécessairement sur le rectangle vert).



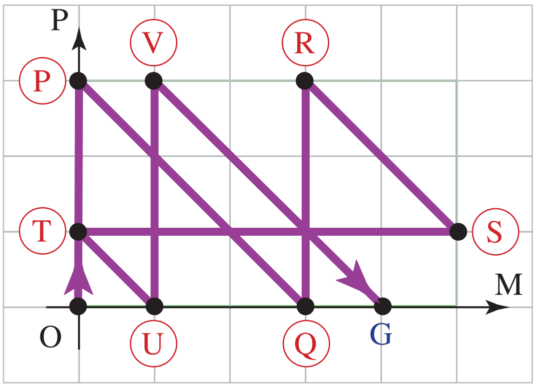
Il suffit alors de quelques tâtonnements pour trouver un bon chemin de O à G. D'ailleurs, on facilite cette recherche en partant de G et en cherchant le chemin à l'envers !



Voici une solution en 7 transvasements qui débute par les deux premiers déjà envisagés et qui finit comme on le voit sur la représentation imagée ci-dessus et ci-contre.



Pour t’entraîner à traduire les schémas en coordonnées, voici la représentation d’une solution en 8 transvasements ; dessine les états successifs des bidons.



Et si le problème t’amuse ou que tu veuilles en poser à tes amis en voici deux autres (mais tu peux aussi t’amuser à en inventer, c’est facile !).

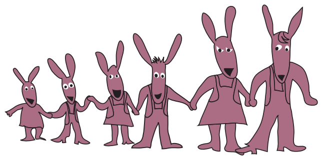
Pour tout instrument de mesure, on dispose de trois cruches de douze, sept et quatre litres. La première est pleine, les autres vides ; par quelles manipulations peut-on être sûr d’avoir six litres dans chacune des deux premières ?

(Il y a une solution en 7 transvasements.)

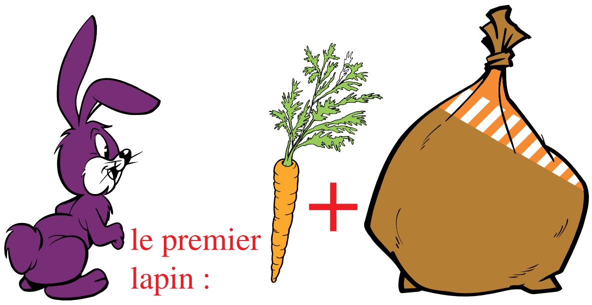
Et avec 3 vases de 16, 11 et 6 décilitres pour obtenir 8 décilitres dans les deux premiers ?
(Il y a une solution en 14 transvasements.)

Les septièmes

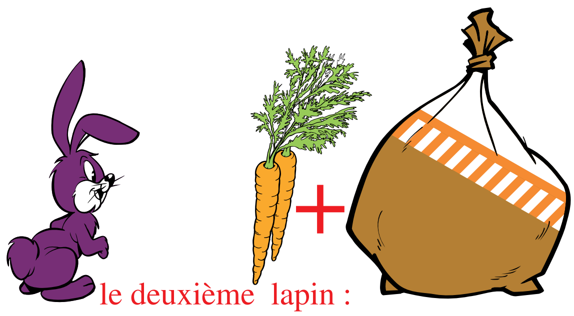
Un homme venant à mourir partage son bien consistant en certaine somme d’écus à ses enfants, en telle sorte qu’il ordonne que le premier prenne 1 écu et la septième partie du restant ; et après que le second prenne 2 écus et la septième partie du reste ; et cela fait que le troisième prenne 3 écus et la septième partie du reste, et ainsi consécutivement des autres. Or le partage fait en cette façon, il se trouve que chacun des enfants est également portionné. On demande la somme des écus et le nombre des enfants.



Les lapins ont à se partager une certaine quantité Q de carottes. Regardons ce que reçoivent les deux premiers lapins.



$$1 + \frac{Q - 1}{7} = \frac{6 + Q}{7}$$



$$2 + \frac{Q - (6 + Q)/7 - 2}{7}$$

Mais il faut que les deux premiers lapins reçoivent la même quantité de carottes. D'où la relation qui nous est bien utile pour trouver la quantité Q :

$$\frac{6+\mathrm{Q}}{7} = 2 + \frac{\mathrm{Q} - (6+\mathrm{Q})/7 - 2}{7}$$

$$6 + \mathrm{Q} = 14 + \mathrm{Q} - \frac{6+\mathrm{Q}}{7} - 2$$

$$\frac{6+\mathrm{Q}}{7} = 6\,;\ \mathrm{Q} = 42 - 6\,;\ \mathbf{Q = 36}.$$

La quantité totale de carottes est donc 36 et les deux premiers enfants ont reçu 6 carottes chacun.

Il doit donc y avoir 6 enfants.

Reste à vérifier que la procédure de partage attribue bien 6 carottes à chaque enfant-lapin :

36 carottes au total	1er lot de carottes	reste en carottes	2e lot de carottes (1/7)	Total de carottes	Reste en carottes
1er lapin	1	35	5	6	30
2e lapin	2	28	4	6	24
3e lapin	3	21	3	6	18
4e lapin	4	14	2	6	12
5e lapin	5	7	1	6	6
6e lapin	6	0	0	6	0

Ce qui est assez miraculeux, c'est qu'à chaque fois le reste en carottes est divisible par 7, mais peut-être qu'en réfléchissant un peu vous ne trouverez pas cela tellement étonnant.

Et pour voir si vous avez bien saisi le mécanisme, voici un problème analogue :

Lors d'un goûter, le premier enfant prend une pomme et 10 % des pommes qui restent dans le panier ; le deuxième prend 2 pommes et 10 % des pommes qui restent, le troisième trois pommes et 10 % des pommes restantes et, ainsi de suite, jusqu'au dernier enfant qui prendra autant de pommes qu'il en restera.

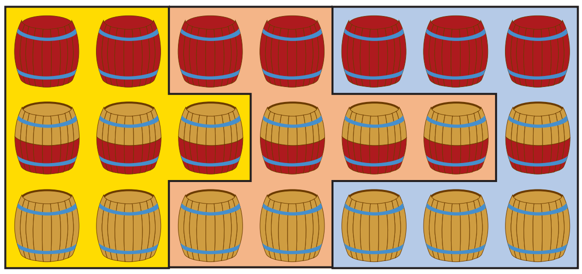
Combien d'enfants participaient-ils à ce goûter et combien le panier contenait-il de pommes ?

Les 21 tonneaux

Trois hommes ont à partager 21 tonneaux, dont il y en a sept pleins de vin, sept vides, et sept pleins à demi.
Je demande comment se peut faire le partage, en sorte que tous trois aient un égal nombre de tonneaux, et égale quantité de vin.

On peut évidemment trouver la solution sans aucune mathématique.

En voici une image :



Et chacun se retrouve bien avec 7 tonneaux et le contenu de 3,5 tonneaux en vin.

En fait, le problème est assez simple à résoudre, même dans le cas général de $3n$ tonneaux (n pleins, n à moitié pleins et n vides) : il suffit de décomposer n en une somme de 3 nombres chacun inférieur à $n/2$:

$$n = a + b + c\ (a \leqslant \frac{n}{2},\ b \leqslant \frac{n}{2},\ c \leqslant \frac{n}{2}).$$

Une solution est alors :
la première personne prend
a pleins, a vides et $n - 2a$ demi pleins.
la deuxième personne prend
b pleins, b vides et $n - 2b$ demi pleins.
la troisième personne prend
c pleins, c vides et $n - 2c$ demi pleins.

On voit ainsi que la solution donnée ci-dessus correspond à la décomposition $7 = 2 + 2 + 3$, mais qu'il y a une deuxième solution correspondant à $7 = 1 + 3 + 3$.

Encore une fois, si vous avez bien compris, vous saurez résoudre les autres problèmes posés par Bachet :

Et si au lieu des 21 tonneaux, il y en avait 27 dont 9 pleins, 9 vides et 9 à demi pleins, à partager entre 3 personnes ? (Il y a trois solutions, dont une est "trop simple' ; à vous de trouver les deux autres.)

Il est bien vrai que ces petits problèmes "plaisants et délectables" excitent l'imagination…

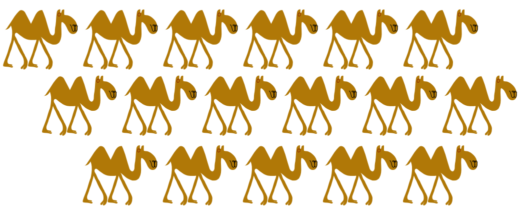
Par exemple, voici un problème trouvé dans "*Le canard du boyau*", Bulletin Officieux de la 74e Demi-Brigade, de novembre/décembre 1917, numéro 16 (c'est notre problème initial, mais en moins gai ; la scène se déroule près des tranchées de 14-18 !).

Les fourriers de 3 compagnies se rendent à l'ordinaire pour toucher des biscuits et des sacs. Il y a 21 sacs à distribuer : 7 pleins de biscuits, 7 à moitié pleins et 7 vides.

Comment doit se faire la distribution pour que chaque compagnie ait le même nombre de sacs et la même quantité de biscuits ?

Les 17 chameaux

Un chamelier laissait 17 chameaux à ses 3 fils : la moitié pour le premier, le tiers pour le second, le neuvième pour le troisième. Comment pourrait s'effectuer le partage ?



La solution de ce problème très connu et très cité dans la littérature, est un peu "trichée".

En effet, 17 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 9 !

D'où l'astuce consistant à EMPRUNTER un chameau pour en avoir 18.

On fait alors le partage :

le premier fils reçoit $\frac{18}{2}$, soit 9 chameaux ;

le deuxième fils reçoit $\frac{18}{3}$, soit 6 chameaux ;

le troisième fils reçoit $\frac{18}{9}$, soit 2 chameaux.

Et cela fait bien un total de 17 chameaux !

On peut alors rendre le chameau emprunté.

En fait, 9 est l'entier le plus proche de $\frac{17}{2}$; et 6 de $\frac{17}{3}$; et 2 de $\frac{17}{9}$. La tricherie consiste en des approximations qu'il faut accepter :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} \approx 1.$$

Sur ce modèle de problème où une somme de fractions ne vaut pas exactement 1, nous vous proposons trois problèmes supplémentaires…

1. Lorsque le vieux Corcine mourut, il laissait 15 chevaux et 4 enfants.

Je veux, avait-il dit, qu'Anatole reçoive le double de Berthold, Berthold le double de Célestine et Célestine le double de Désiré.

Combien chaque enfant reçut-il de chevaux ?

2. Le vieux Ralière mourut à son tour ; il laissait un héritage d'une valeur de 19 vaches, 4 enfants et un testament plus compliqué encore : Zoé devait recevoir la moitié de l'héritage, Yvonne le quart, Xavier et William chacun le dixième.

Combien chaque enfant a-t-il pu recevoir de vaches ?

3. Quand Moneille mourut, la famille commençait à avoir l'habitude des partages.

Il avait voulu laisser la moitié de son héritage à son fils unique, le tiers à sa femme et le sixième à la fondation Rot. Seulement voilà, il avait 50 voitures !

Comment cela a-t-il pu se passer ?