**KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES**
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
**www.mathkang.org**

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 70 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

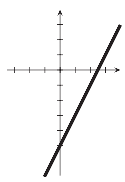
# Kangourou 2017 - Corrigé du sujet « J »

**1.** Réponse **B.** Le nombre du milieu de la base de la pyramide est $2020-2017=3$. Le nombre cherché est donc $19-3=16$.

**2.** Réponse **B.** La partie grise extérieure a une aire de 4 cm$^2$ ($10-6=4$) et la partie grise intérieure de 2 cm$^2$ ($3-1=2$). La partie grise a donc une aire de 6 cm$^2$.

**3.** Réponse **C.** Margot doit répartir ce qu'elle a en plus des autres en quatre parts égales : $\dfrac{24-12}{4}=3$.
Elle donne 3 euros à chacune de ses sœurs.

**4.** Réponse **B.** Si $x \leqslant 0$, alors $f(x) < -5 < 0$.
Aucun point de la représentation graphique de $f$ ne peut donc avoir une abscisse négative et une ordonnée positive, ce qui correspond au quadrant II.



**5.** Réponse **C.** Après avoir joué les 5 dernières parties, Martin aura joué 20 parties ($15+5$) et s'il les gagne, il en aura gagné 14 ($9+5$).
Son taux de réussite sera donc $\dfrac{14}{20}=\dfrac{14\times 5}{20\times 5}=\dfrac{70}{100}$.

**6.** Réponse **B.** 30 deniers c'est $6\times 5$ deniers donc $6\times 4$ pistoles.
Et $6\times 4$ pistoles c'est $7\times 4$ florins soit 28 florins.

**7.** Réponse **C.** Si on ne prend que 6 bonbons, on peut en avoir deux de chaque parfum. Et si on prend 7 bonbons, on en aura au moins 3 d'un des trois parfums.

**8.** Réponse **E.** Géométriquement, Pablo fera une symétrie d'axe vertical suivie d'une symétrie centrale. Cela équivaut à une symétrie d'axe horizontal. Le résultat est donc E.

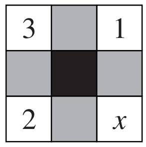
**9.** Réponse **A.** Quand la roue passe sur une pointe, son centre décrit un arc de cercle (dessins A et C). Quand la roue passe dans un creux, son centre suit d'abord, jusqu'à son point le plus bas, une parallèle au segment descendant puis, dès son point le plus bas, le centre suit une parallèle au segment remontant (dessins A et B). Le bon dessin est le A.

**10.** Réponse **A.** Si un huitième des animaux sont des koalas alors 7 huitièmes sont des kangourous. Et si 3 septièmes des kangourous sont gris alors 4 septièmes des kangourous sont roux. Les kangourous roux représentent donc $\frac{7}{8}\times\frac{4}{7}$ soit $\frac{1}{2}$ de l'ensemble des animaux de l'enclos.

**11.** Réponse **E.** La circonférence du disque est $2\pi$. Il fait donc un tour lorsqu'il roule sur une longueur de $2\pi$ et 4 tours et demi sur une longueur de $9\pi$. Il est vu comme s'il avait fait un demi-tour : c'est le dessin E.

**12.** Réponse **D.** On exprime les longueurs en cm et les aires en cm$^2$.
Si $h$ est la hauteur du trapèze KLMN,
son aire est $\frac{\mathrm{KL}+\mathrm{NM}}{2}\times h = \frac{50+20}{2}\times h = 35\,h$.
Le trapèze étant partagé en deux parties d'aires égales, l'aire du triangle KNP est $\frac{35\,h}{2}$. Ce triangle ayant pour hauteur $h$, sa base KP est égale à 35.

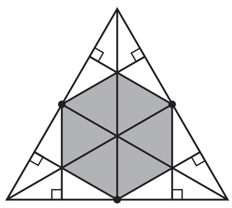
**13.** Réponse **E.** Si le nombre à 4 chiffres est $N$ alors $N+20$ doit être à 5 chiffres : $N+20$ peut valoir de 10000 à 10019 et $N$ peut être l'un des 20 nombres de 9980 à 9999.
Si le nombre à 4 chiffres est $N+20$ alors $N$ doit être à 3 chiffres et peut être l'un des 20 nombres de 980 à 999.
Au total, 40 entiers naturels possèdent la propriété énoncée.



**14.** Réponse **D.** On note $x$ nombre cherché. On considère les quatre carrés $2\times2$ : la somme des 8 nombres du carré contenant 1 et du carré contenant 2 doit être égale à celle des 8 nombres du carré contenant 3 et du carré contenant $x$. Mais 6 des cases sont les mêmes : les quatre cases grises et la case noire centrale prise deux fois.
On doit donc avoir $1+2=3+x$. D'où $x=0$.

**15.** Réponse **C.** Soient $n-1$, $n$ et $n+1$ les trois entiers.
On a $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=770$. D'où : $3n^2+2=770$ et $n^2=256$.
$n=16$ et le plus grand des trois entiers est 17.

**16.** Réponse **B.** Mathilde doit courir 3 jours sur 7 sans courir deux jours de suite, elle doit donc courir selon la périodicité : course, repos, course, repos, course, repos, repos (avec des durées de repos de 1, 1 et 2 jours). Elle a 7 choix pour le jour de course qui précède les deux jours de repos et le reste du planning en découle. Il y a donc 7 plannings différents possibles.
(En notant du lundi=1 au dimanche=7, les sept plannings sont :
135, 136, 146, 246, 247, 257 et 357.)



**17.** Réponse **D.** On joint le centre de l'hexagone aux milieux des côtés et aux sommets du triangle équilatéral (voir la figure ci-contre).
Les 12 petits triangles rectangles blancs ont leurs angles aigus égaux à 30° et 60°. Ils ont la même aire qui est aussi égale à la moitié de celle d'un petit triangle équilatéral gris.
La somme des aires des 6 triangles équilatéraux gris et donc égale à la somme des aires des 12 triangles rectangles blancs : L'hexagone, composé des six triangles équilatéraux gris, recouvre donc la moitié du grand triangle.

**18.** Réponse **A.** On a, rangés du plus petit au plus grand : Olivier, Paul, Thibault et Victor et on note O, P, T et V leurs tailles respectives.
Le trois écarts entre deux tailles successives étant les mêmes, la moyenne des tailles de Paul et Thibault est égale à la moyenne des quatre frères. Thibault mesurant $184-178$ soit 6 cm de plus que la moyenne, Paul mesure 6 cm de moins que la moyenne et l'écart entre deux tailles successives est 12 cm. Et donc Paul mesure 172 cm et Olivier mesure $172-12$ soit 160 cm.

**19.** Réponse **C.** Au total, on a au moins $7+5+6$ soit 18 demi-journées donc 9 jours. Et 9 jours est le minimum cherché puisqu'il a pu y avoir 3 jours avec soleil le matin et pluie l'après-midi, 4 jours avec pluie le matin et soleil l'après-midi et 2 jours sans pluie.

**20.** Réponse **E.** Il y a 1 seul mot de passe composé avec le même chiffre répété : 7777777.
$7=1+6=2+5=3+4$. Il y a 6 mots de passe utilisant seulement deux chiffres : 2 pour chacune des paires $\{1\,;6\}$, $\{2\,;5\}$ et $\{3\,;4\}$ en commençant par l'un ou l'autre des chiffres.
La seule décomposition de 7 en somme de plus de deux entiers différents non nuls est $7=1+2+4$. Cela donne 6 mots de passe possibles suivant l'ordre du 1, des 2 et des 4.
Au total, il y a donc $1+6+6$ soit 13 mots de passe possibles.

**21.** Réponse **D.** On décompose 882 en facteurs premiers :
$882=2\times3^2\times7^2$.
Comme les âges sont tous différents et inférieurs à 18, deux des âges sont nécessairement 7 et 14 (7 et $7\times2$).
Le produit des deux autres âges doit alors être 9 qui n'est possible qu'avec 1 et 9.
Et la somme des quatre âges est $1+7+9+14$ soit 31.

**22.** Réponse **E.** On obtient un produit strictement négatif si l'un des lancers est strictement négatif ($-3$, $-2$ ou $-1$) et l'autre strictement positif (1 ou 2). On a $3\times2$ soit 6 cas possibles avec le 1er lancer strictement négatif et le 2e strictement positif. Et aussi 6 cas possibles si c'est le 1er lancer qui est strictement positif et le 2e strictement négatif. On a donc au total 12 cas favorables sur $6\times6$ cas possibles.
$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ : la probabilité d'obtenir un produit strictement négatif est $\frac{1}{3}$.

**23.** Réponse **E.** La somme des angles d'un polygone convexe à $n$ côtés est $(n-2)\times180°$. [On peut le démontrer en prenant un point à l'intérieur du polygone et en considérant les $n$ triangles dont les sommets sont ce point et deux sommets successifs du polygone : la somme de tous les angles de ces triangles est égale à $n\times180°$ et aussi à la somme des angles du polygone et des angles autour du point intérieur ; la somme des angles autour du point intérieur valant 360°, on a bien $n\times180° - 360° = (n-2)\times180°$.]
$11\times180=1980$ et $12\times180=2160$ : le premier multiple de 180 plus grand que 2017 est 2160. L'angle oublié mesure donc $2160°-2017°$ soit 143°.

**24.** Réponse **B.** On peut retirer 100 g à chaque masse sans modifier le problème. On cherche deux nombres parmi 1, 2, 3, 4 et 5 tels que leur somme plus 6 soit strictement inférieure à la moitié de la somme totale $1+2+3+4+5+6=21$, c'est-à-dire à 10,5. Les seuls choix qui conviennent sont (1 et 2) et (1 et 3). Et il y a 10 manières de choisir 2 nombres parmi 5.

Les choix étant équiprobables, la probabilité cherchée est $\frac{2}{10}$ soit 0,2.

**25.** Réponse **6.** Dans le cercle de trente danseurs, après un signal, deux danseurs voisins sont soit face à face, soit dos à dos, soit l'un derrière l'autre. On remarque que, dans une suite de danseurs qui sont l'un derrière l'autre, si on n'en garde qu'un (et qu'on enlève les autres) alors, dans le nouveau cercle de danseurs, il y aura toujours le même nombre de danseurs face à face et de danseurs dos à dos. Et donc, si, dans toutes les suites de danseurs qui sont l'un derrière l'autre, on n'en garde qu'un, il ne restera plus de danseurs l'un derrière l'autre et on aura dans le nouveau cercle autant de face à face et de dos à dos qu'avant. Dans le cas où après le signal il y a six paires de danseurs face à face, le nouveau cercle est composé de douze danseurs chacun étant face à face avec un de ses deux voisins et dos à dos avec l'autre. Il y a donc 6 face à face et 6 dos à dos. On en conclut que dans le cercle de trente danseurs il y avait aussi, après le premier signal, 6 face à face et 6 dos à dos. Chacun faisant un demi-tour entre les deux signaux, le nombre de face à face après le second signal est égal au nombre de dos à dos avant ce second signal donc égal à 6.

**26.** Réponse **6.** On pose $n=\mathrm{MS}=\mathrm{MT}$ (rayon du cercle de centre M passant par S et T) et $a=\mathrm{PS}$.
(MT) et la tangente au cercle (PT) sont perpendiculaires, donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $\mathrm{PT}^2+\mathrm{MT}^2=\mathrm{PM}^2=(\mathrm{PS}+\mathrm{SM})^2$.
D'où $(a+6)^2+n^2=(a+n)^2$. Et donc : $12a+36=2an$ ; $a(n-6)=18$.
$a$ et $n$ devant être entiers, il y a autant de valeurs possibles pour $a$ ou pour $n$ que de diviseurs de 18. Et 18 a six diviseurs : 1, 2, 3, 6, 9 et 18.