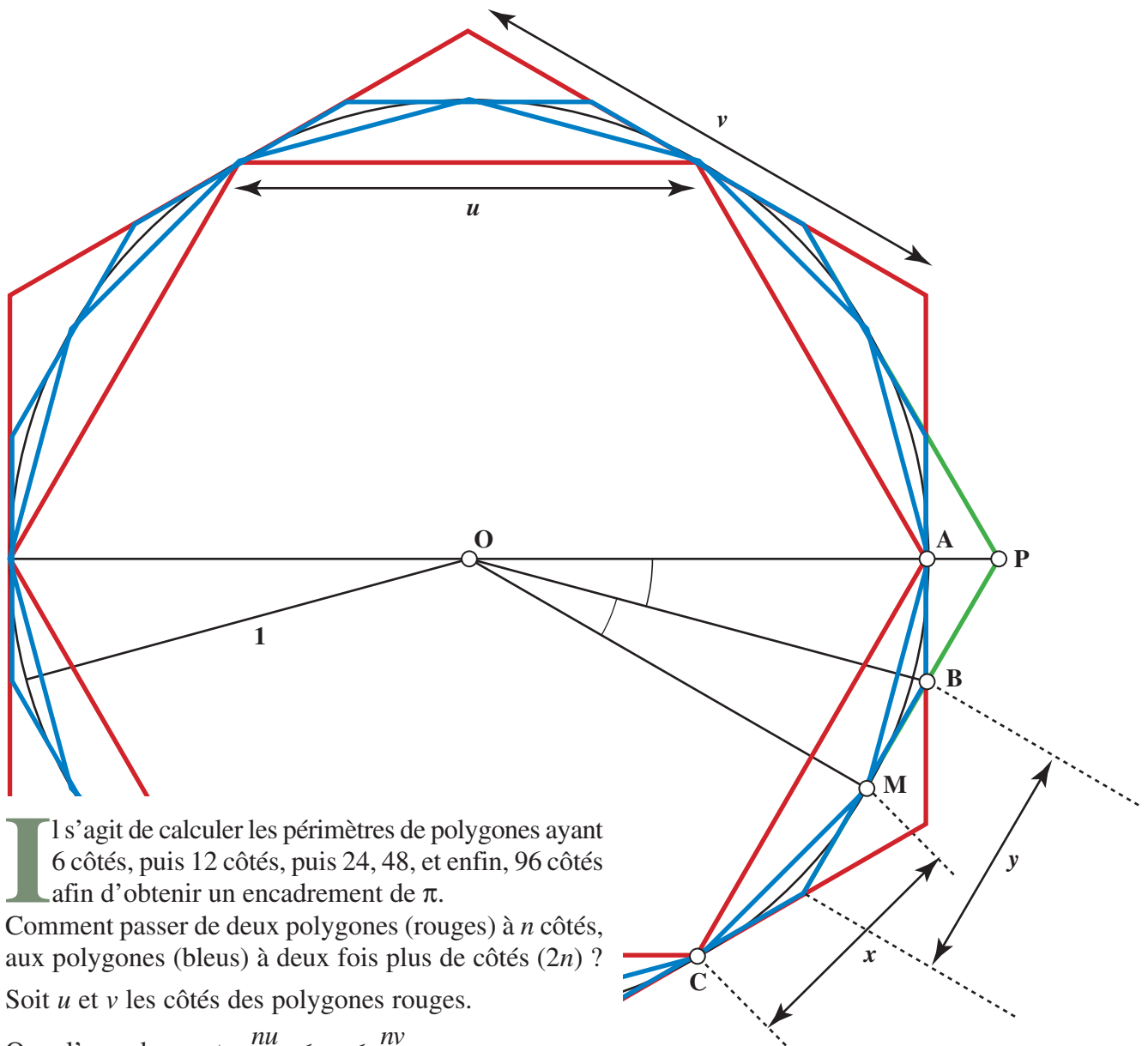




Le calcul de π par la méthode d'Archimède



Il s'agit de calculer les périmètres de polygones ayant 6 côtés, puis 12 côtés, puis 24, 48, et enfin, 96 côtés afin d'obtenir un encadrement de π .

Comment passer de deux polygones (rouges) à n côtés, aux polygones (bleus) à deux fois plus de côtés ($2n$) ?

Soit u et v les côtés des polygones rouges.

On a l'encadrement : $\frac{nu}{2} < \pi < \frac{nv}{2}$.

Calculons les côtés x et y des polygones bleus.

On a $\frac{OM}{OP} = \frac{BM}{BP}$ (*) et $\frac{BM}{BP} = \frac{BM}{MP - BM} = \frac{y}{v - y}$.

Or $\frac{OM}{OP} = \frac{OA}{OP} = \frac{u}{v}$, d'après le théorème de Thalès.

D'où $uv - uy = vy$ et $y = \frac{uv}{u + v}$.

D'autre part, les triangles AMC et ABM ont leurs côtés proportionnels (car ils ont les mêmes angles) ; donc

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AM},$$

c'est-à-dire $\frac{x}{y/2} = \frac{u}{x}$ et $x = \sqrt{\frac{uy}{2}}$.

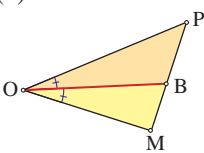
Ainsi, à partir de u et v , vous pouvez calculer x et y et avoir un nouvel encadrement de π qui sera « meilleur » que le précédent :

$$nx < \pi < ny.$$

Vous pouvez vous-même faire les calculs d'Archimède et vous lancer à la conquête des décimales du nombre π .

Il vous suffit de vous munir d'une calculatrice et de remplir le tableau ci-dessous ligne par ligne en calculant comme dans le tableau ci-contre.

Savoir utile

(*)  Si (OB) est la bissectrice de MOP, alors :

$$\frac{OM}{OP} = \frac{BM}{BP}.$$

Il faudra sûrement vous faire aider (ou vous accrocher aux branches) pour bien comprendre le calcul ci-contre ; en effet, trois théorèmes successifs sont à appliquer à trois endroits bien choisis de la figure. Mais vous pouvez vous contenter de faire les calculs : il vous suffit d'appliquer les formules en rouge pour faire votre « petit Archimède ».

n	u	v
$2n$	$x = \sqrt{\frac{uy}{2}}$	$\frac{uv}{u + v} = y$

$\times \frac{n}{2}$ $\times \frac{n}{2}$

n	côté du polygone inscrit	côté du polygone circonscrit	$\dots < \pi < \dots$
6	1	1,154 700 538	3 3,464 101 614
12	0,517 638 089	0,535 898 384	3,105... 3,215...
24	0,261 052 383	0,263 304 994	3,132... 3,159...
48	0,130 806 258	0,131 086 925	3,1393... 3,1460...
96	0,065 438 165	0,065 473 220	3,1410... 3,1427...

Le côté de l'hexagone circonscrit au cercle de rayon 1 est $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Et $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,154700538$.

Nous avons effectué tous les calculs et trouvé un encadrement de π dans les cases rouge et bleue ; il est bien compatible avec celui annoncé

par Archimède : $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

$3 + \frac{10}{71} = 3,1408\dots$ et $3 + \frac{1}{7} = 3,1428\dots$