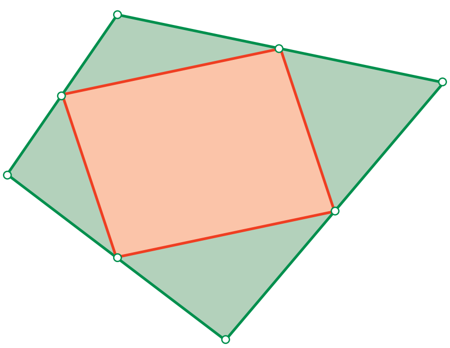
Paver avec des carreaux de 4 côtés, 5 côtés, de 6 côtés...

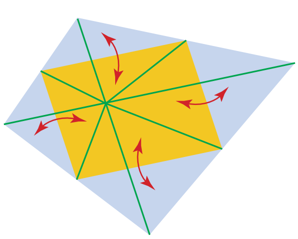
Dans tout quadrilatère, aussi bizarre soit-il, se cache un **parallélogramme** :

C'est l'un des trois premiers beaux théorèmes que l'on rencontre en géométrie. La démonstration est une assez jolie “construction” que nous vous avons rappelée à la page 8.



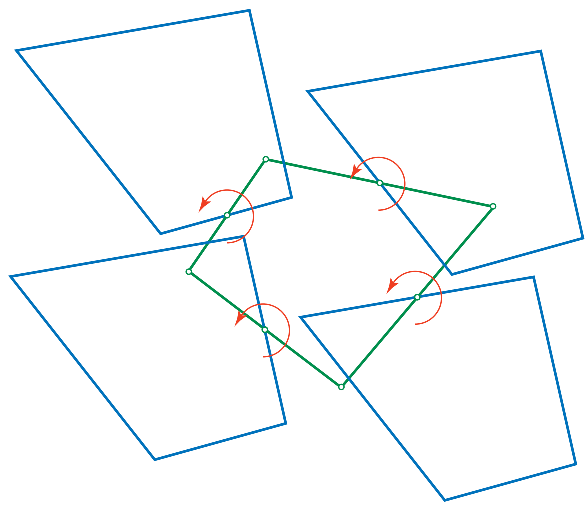
Alors, puisque l'on peut paver le plan avec des carreaux ayant la forme d'un parallélogramme...

chaque quadrilatère n'étant qu'une enveloppe en forme de parallélogramme déplié...

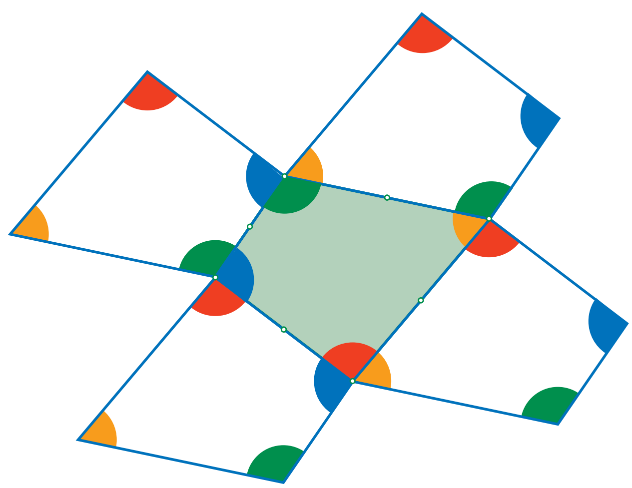


on doit pouvoir paver le plan avec des carreaux ayant la forme d'un quadrilatère quelconque !

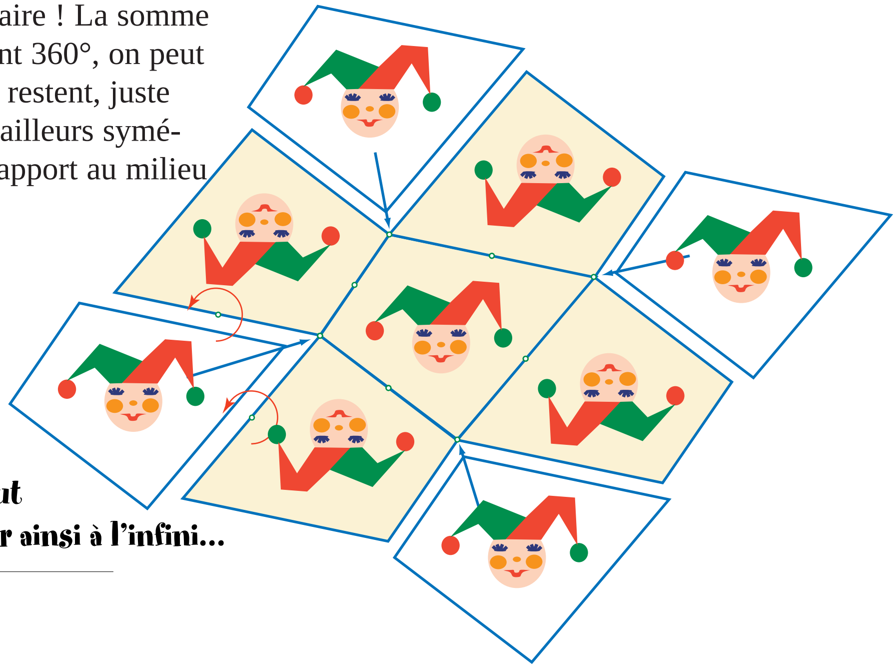
Pour cela, faisons tourner le quadrilatère d'un demi-tour autour de chacun des milieux de ses côtés.

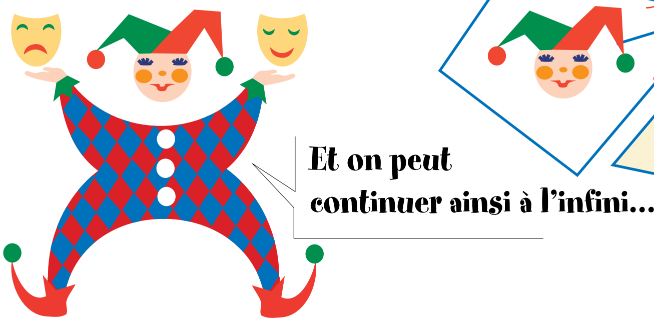


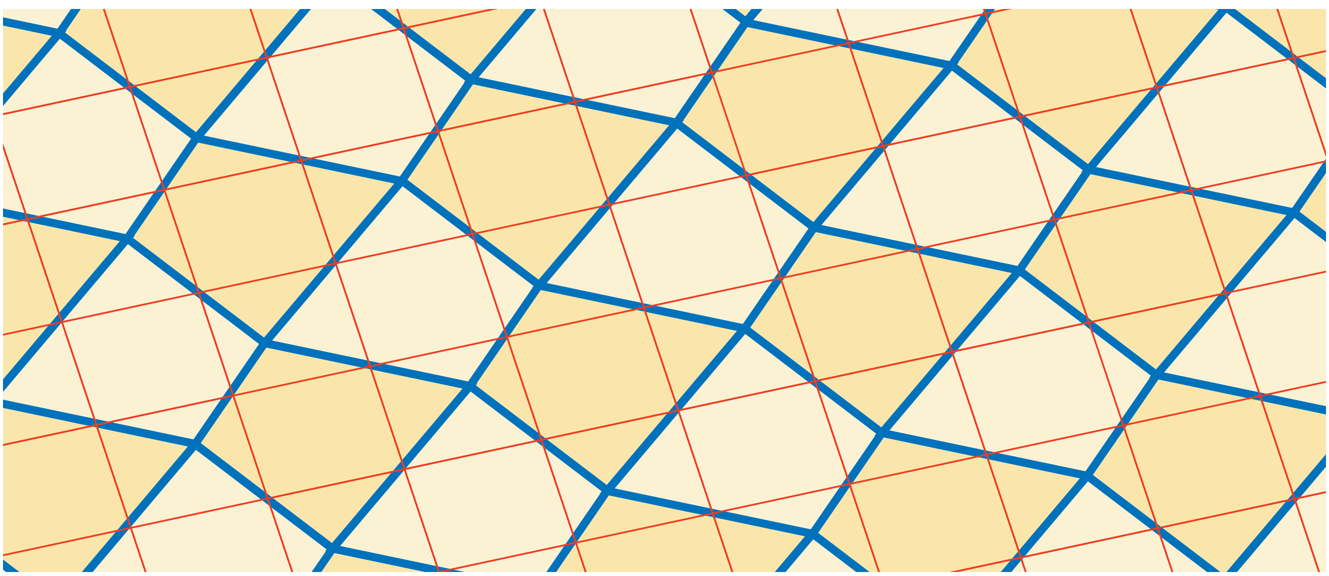
Les égalités d'angles marqués sur la figure suivante se déduisent des propriétés de la symétrie centrale, en partant des angles du quadrilatère initial.

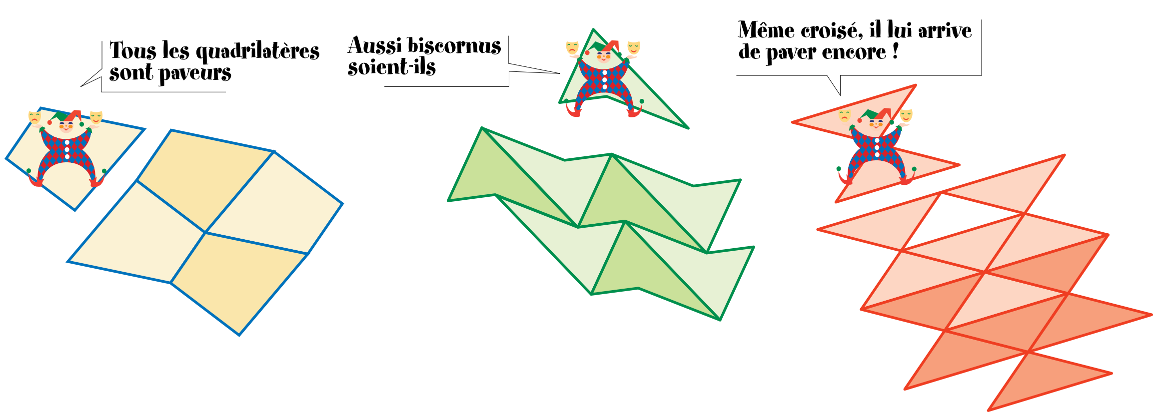


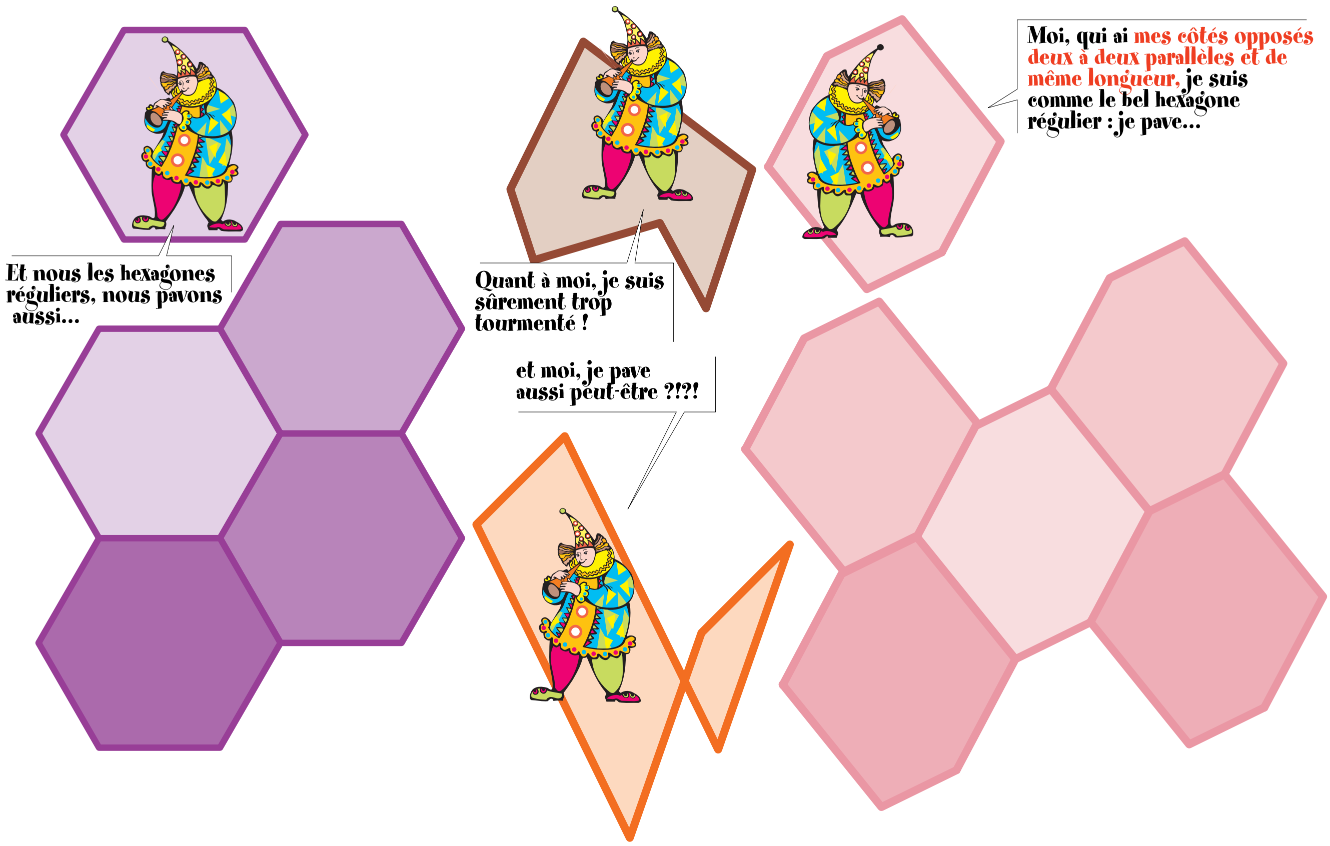
Mais attention, c'est extraordinaire ! La somme des angles d'un quadrilatère valant 360°, on peut donc, dans les quatre “coins” qui restent, juste glisser un quadrilatère (qui est d'ailleurs symétrique des deux qu'il côtoie par rapport au milieu de leurs côtés).



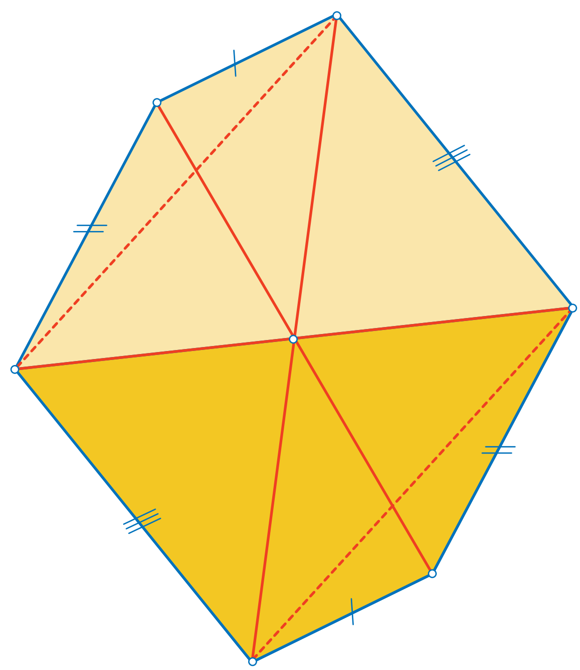








Aussi étonnant que cela paraisse au premier abord, l’hexagone représenté ci-contre pave le plan en vertu du théorème suivant :

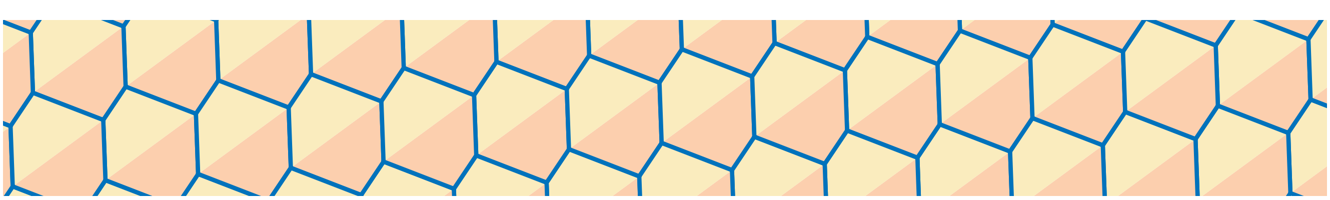


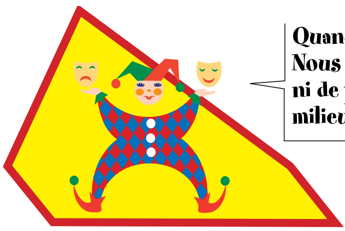
Théorème des paveurs hexagonaux :
Si un hexagone a, deux à deux, ses côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c’est un carreau qui pave le plan.

Démonstration : Si un hexagone a, deux à deux, ses côtés parallèles et de même longueur, alors ses diagonales (qui sont aussi celles de parallélogrammes) se coupent en leur milieu (voir la figure).

Et chacune de ces diagonales découpe cet hexagone en deux quadrilatères symétriques.

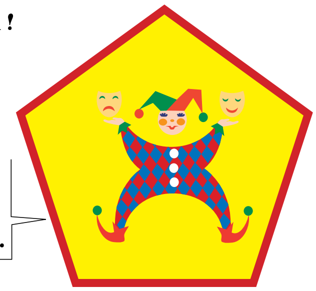
Comme ce quadrilatère pave le plan par des symétries successives, l’hexagone (qui n’est qu’un couple accolé de deux tels quadrilatères symétriques) pave aussi le plan (voir aussi, en page 30, une idée qui explique beaucoup de choses…)..



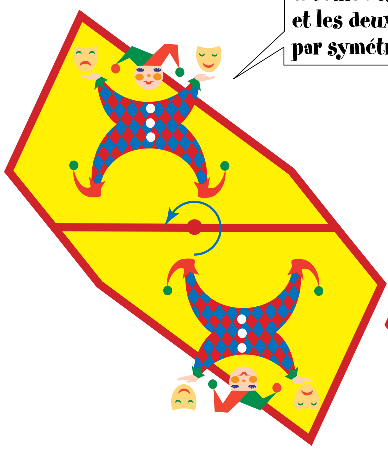


Quand à nous, nous n'avons rien de commun avec ces paveurs de plan ! Nous sommes d'honnêtes pentagones, sans beaucoup de régularités, ni de parallélogrammes tellement honteux qu'ils se cachent entre les milieux des côtés d'un quadrilatère !

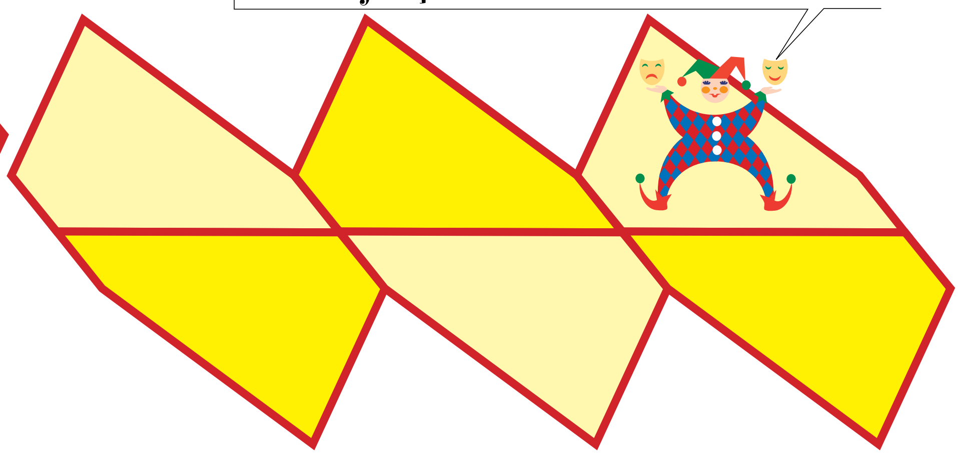
Pourtant, il me semble apercevoir deux de vos côtés non adjacents, parallèles et de même longueur. Tournez-vous un peu pour voir ! Oui... autour du milieu du côté qui les touche, autour de votre "base".

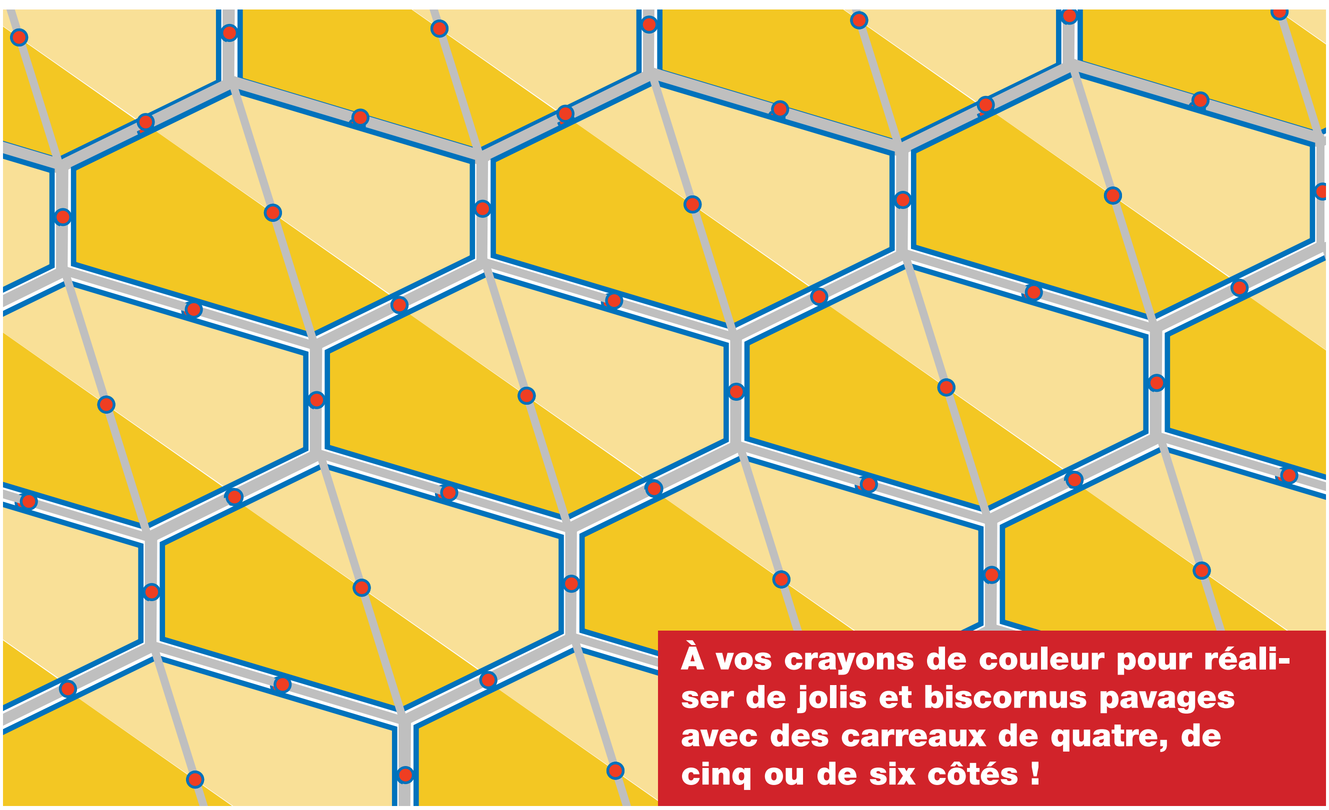


Damnation ! Par symétrie autour du milieu de ma base, chacun des côtés non-adjacents parallèles a doublé de longueur et les deux derniers côtés ce sont reproduits parallèlement par symétrie.



Je suis aussi devenu un hexagone paveur (à côtés opposés parallèles et de même longueur) !
Au secours, je me perds dans une multitude de clones...





À vos crayons de couleur pour réaliser de jolis et biscornus pavages avec des carreaux de quatre, de cinq ou de six côtés !