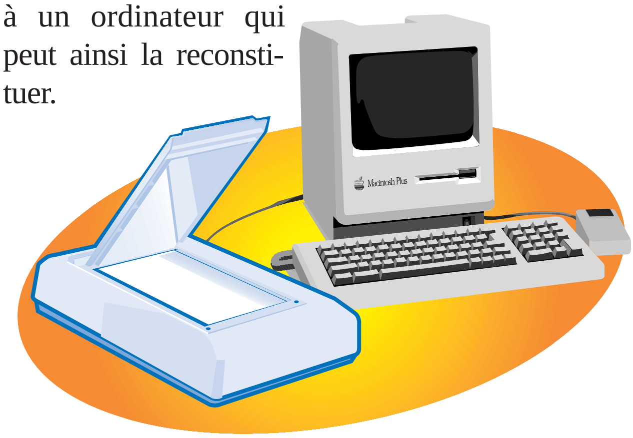
Du scanner au millefeuille

Le mot anglais **scan** à la même origine latine que le mot **scander** en français. “Scander” des vers c’est en découper les syllabes ou groupes de syllabes pour mieux en faire apparaître la structure. Ainsi par exemple :

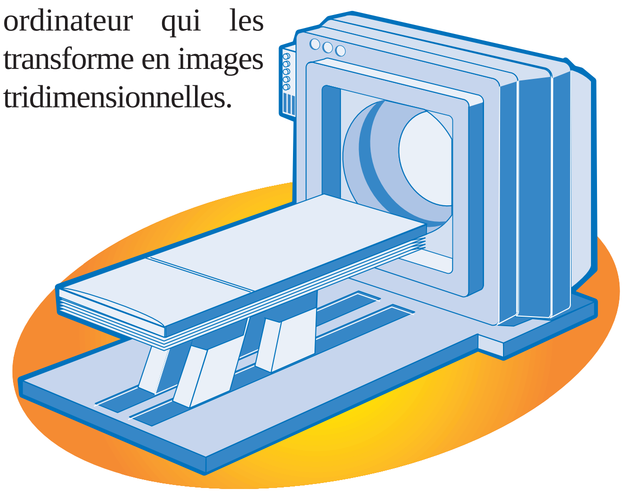
Et vois-tu/ chaque jour,/ je t’aime/ davantage/
Aujourd’hui/ plus qu’hier/ et bien moins/ que demain !/

En anglais le verbe **to scan** a pris le sens plus général de balayer pour observer ; et il nous est revenu sous la forme substantivée avec **scanner**.

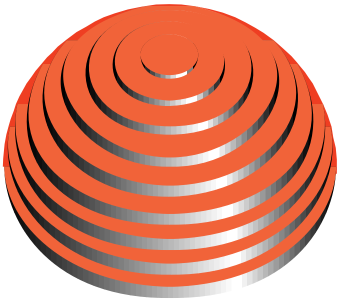
Un scanner c’est par exemple l’appareil qui analyse une image point par point pour la transmettre à un ordinateur qui peut ainsi la reconstituer.



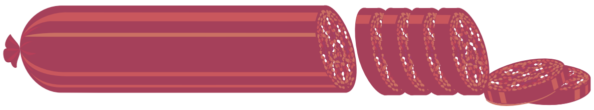
Mais ce mot désigne aussi l’appareil médical qui radiographie des “tranches” de corps humain et en transmet les données à un ordinateur qui les transforme en images tridimensionnelles.



Sur le même principe voici ce que l’on pourrait appeler le “scan” d’une demi-sphère,



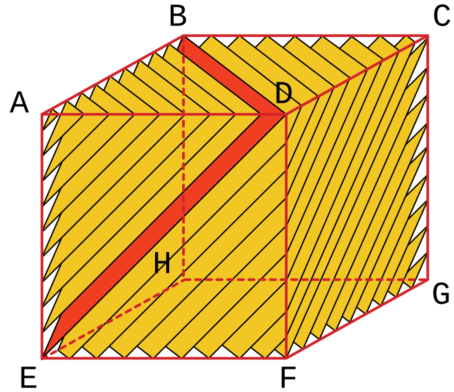
ou le début du scan d’une sorte de cylindre.



En découpant de même un volume mathématique par une suite de plans parallèles, on peut obtenir des résultats intéressants.

ACTIVITÉ 1

Voici par exemple le découpage en tranches d’un cube par des plans parallèles à un plan passant par 3 sommets deux à deux opposés sur une face (les sommets B, D, E sur la figure).



A. Si le plan de coupe traverse une arête issue de A ou de G, *montrer* que l'intersection du plan et du cube est un triangle équilatéral.

B. Si le plan de coupe traverse l'arête [BC], l'intersection du plan et du cube est un hexagone.

a) *Dessiner* en “vraie grandeur” quelques-uns de ces hexagones.

b) *Trouver* une propriété caractéristique de ces hexagones.

c) *Peut-on “paver”* le plan avec des carreaux tous identiques à l'une de ces sections ?

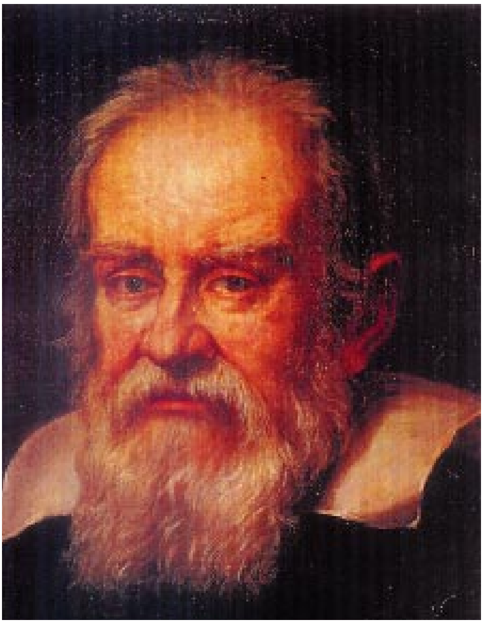
d) La section *peut-elle être* un hexagone régulier ? Pour quelle position du plan de coupe ?

C. *Décrire* le solide BCDFEH obtenu en coupant le cube par les deux plans BDE et CFH (nombre de sommets, nombre et forme des faces).

Le dessiner en perspective cavalière posé sur sa face CFH.

ACTIVITÉ 2

Dans son ***Dialogue au sujet de deux sciences nouvelles*** (1638) Galilée montre comment calculer le volume d'une demi-sphère de manière très astucieuse.



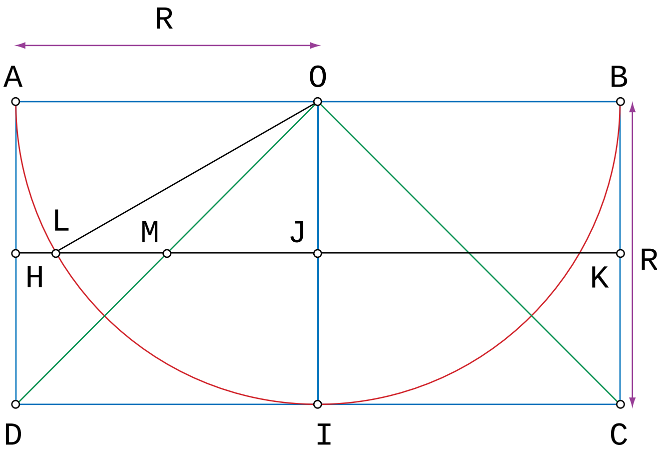
Sa méthode de “découpage en tranches” fut popularisée par son élève, Cavalieri, sous le nom de “*géométrie des indivisibles*”.

Elle est fondée sur la remarque suivante :

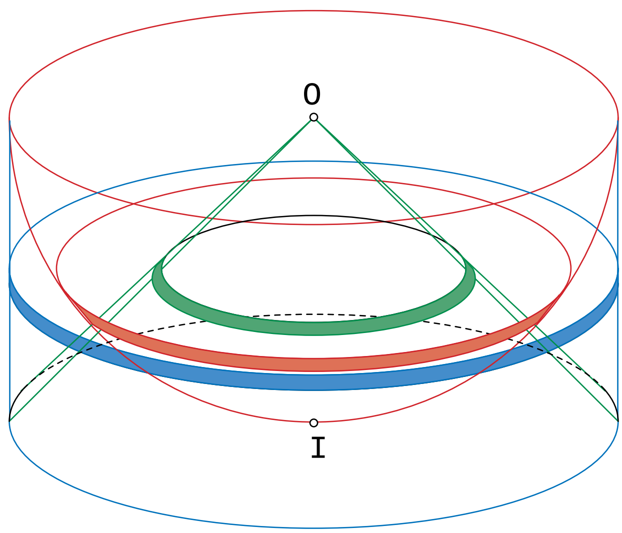
On coupe deux volumes par des plans toujours horizontaux.

Si les sections planes de deux volumes ont la même aire pour chaque plan horizontal, alors les volumes eux-mêmes sont égaux.

On considère alors les trois volumes engendrés par la figure suivante tournant autour de (OI).

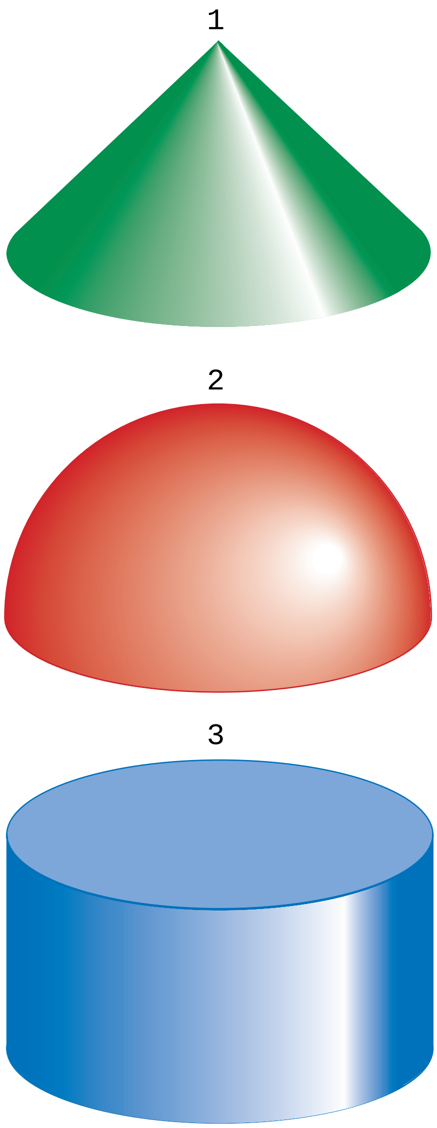


On obtient un cylindre, une demi-sphère et un cône, ici représentés coupés par un plan horizontal contenant la droite (HK).



A. *Montrer* que, pour tout plan de coupe, l'aire du disque découpé sur le cône (dessiné en vert sur la figure) est égale à l'aire de la couronne découpée sur l'écuelle (complémentaire de la demi-sphère dans le cylindre et dessinée en rouge sur la figure).

B. Galilée en déduit que le volume du cône est égal à celui de l'écuelle. *En déduire* que le cône, la demi-sphère et le cylindre ont bien des volumes proportionnels aux nombres 1, 2, 3.



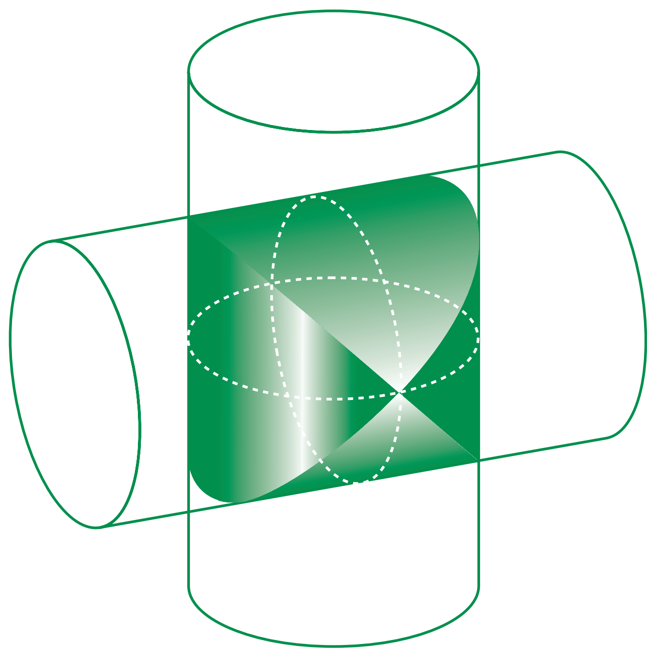
ACTIVITÉ 3

La situation précédente peut se décrire aussi en termes de pâtisserie :

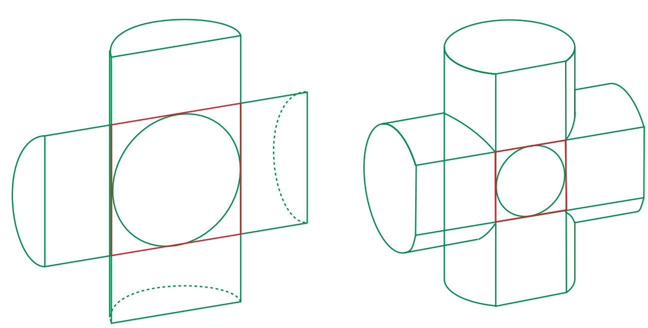
Un millefeuille est un vrai gâteau dans lequel il y a quelque chose à manger : c'est un volume. Et pourtant il est constitué de feuillets tellement minces que n'importe quel pâtissier vous dira (si le millefeuille est bien fait) qu'il ne peut en faire de plus fin : les feuillets du millefeuille sont "indivisibles". Ainsi en empilant beaucoup de surfaces (les feuillets), on peut obtenir un volume.

Si un millefeuille *b* a des feuillets trois fois plus petits que le millefeuille a, alors ce millefeuille *b* est trois fois plus petit que le millefeuille *a*. Grâce à cette remarque, on peut réussir à calculer des volumes moins gourmands et apparemment compliqués. Dans l'exemple ci-dessous, les feuillets à comparer ont ainsi la forme de carrés et de cercles…

Deux cylindres de même rayon et d'axes perpendiculaires dans un même plan, se coupent à angle droit. *Quel est le volume V commun aux deux cylindres* ?



Il y a inscrit dans ce volume V, une sphère tangente à chacun des deux cylindres.



Les deux figures suivantes montrent des intersections d'un plan vertical avec cette sphère en vert et avec ce volume en rouge.

Solution page **30**.

La vérité sur le millefeuille

Y a-t-il vraiment mille feuilles dans la pâte dite feuilletée ? Les pâtissières et pâtissiers ont-ils vraiment fait le calcul ?
Une analyse mathémalicieuse des différentes étapes va nous donner la surprenante réponse…
Rappelons-en la recette, extraite des “**Secrets de la casserole**” de Hervé This, éd. Belin.

I. Après un premier étalage de la pâte en carré, on place au centre le beurre qui va se répartir entre chaque paire de feuilles (1).
II. On étale en rectangle (2), on plie en trois (3), on tourne le tout d’un quart de tour et on recommence.
III. Pour un feuilletage idéal, on recommence deux fois encore les opérations II et III.

Solution page **30**