KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le *jeu-concours Kangourou* est le plus grand jeu scolaire du monde : plus de 5 millions de participants répondent le même jour aux mêmes questions, chacun dans leur langue et selon leur âge de 8 à 18 ans.
C'est une grande manifestation populaire qui atteste de la volonté des jeunes de « rester intelligents », en réfléchissant et en essayant de répondre à d'amusantes petites questions de mathématiques comme à quelques belles interrogations.
Le *Kangourou* souhaite aussi accompagner l'éducation et les progrès des élèves les plus doués. Dans cet esprit, les *Trophées Kangourou* consacrent chaque année de *jeunes talents mathématiques* parmi les meilleurs de leur classe d'âge.

Trophées Kangourou 2008 - Corrigé de l'épreuve Benjamins

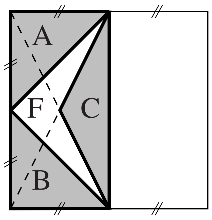
1. Réponse **A.** $8x = 2008$ mm. $x = 251$ mm.

2. Réponse **D.** K ne peut valoir 9 sinon le résultat de l'addition aurait 4 chiffres.
Si K = 8, L = 9 est possible, l'addition étant alors

$$\begin{array}{r} 8\;8\;8 \\ +\quad 9\;8 \\ +\quad\;\; 8 \\ \hline 9\;9\;4 \end{array}$$

994 est le plus grand résultat à trois chiffres possibles et s'écrit LLM (avec M = 4).

3. Réponse **C.** On note A, B, C et F les aires délimitées par les très épais de la figure ci-contre.



$F = \frac{1}{2} - (A + B) - C$. $A + B = \frac{1}{4}$ (quart du carré).
$C = \frac{1}{8}$ (quart du rectangle, lui-même égal au demi-carré).
Et $F = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.

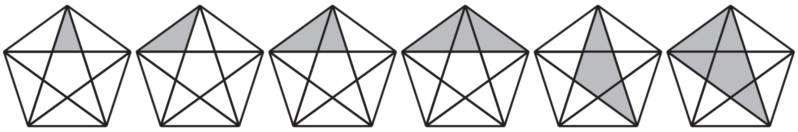
4. Réponse **B.** En opérant « à l'envers », on compte :
2008 → 1004 (1) → 502 (2) → 251 (3) → 250 (4) → 125 (5) → 124 (6) → 62 (7) → 31 (8) → 30 (9) → 15 (10) → 14 (11) → 7 (12) → 6 (13) → 3 (14) → 2 (15) → 1 (16) → 0 (17).

5. Réponse **A.** Le nombre d'allumettes est :

$$\begin{aligned} 2 \times (1 + 2 + 3 + \ldots + 2007 + 2008) - 2008 &= 2 \times (1004 \times 2009) - 2008 \\ &= 2008\,(2009 - 1) \\ &= 2008^2. \end{aligned}$$

6. Réponse **A.** La somme des 8 nombres $(2+3+4+5+6+7+8+9)$ est 44 et donc la somme de quatre nombres sur des faces ayant un sommet commun est 22.
On a $S + T = 22 - 9 - 3 = 10$ (sommet « T39S »), donc $R = 22 - 10 - 5 = 7$ (sommet « RST5 »). Et $S + U = 22 - 9 - 7 = 6$ (sommet « RS9U »).
Remarque : pour les valeurs de S, T, U et V, il y a deux possibilités (dans l'ordre 2, 8, 4, 6 ou 4, 6, 2, 8) mais $S + U$ est toujours égal à 6.

7. Réponse **D.** 35.



5 5 10 5 5 5

8. Réponse **D.** $\overline{cdu}+\overline{udc} = 100c+10d+u+100u+10d+c$
$= 100(c+u) + 10\times(2d) + (c+u).$

Le chiffre des unités de la somme étant impaire, c et u sont de parité différente ($c+u$ est impair).
$c+u<10$ est impossible car sinon le chiffre des dizaines de la somme serait pair.
On a donc : $c+u>10$.
Alors $d<5$, car sinon le chiffre des centaines de la somme serait pair (la retenue de $10\times(2d)$, ajoutée à $c+u$, donnerait $c+u+1$ et serait pair).
On a donc $10>c>5>d>u>1$. Et u ne peut valoir que 2 ou 3.
Avec $u=2$, on a les nombres *impartiaux* 932 et 942. Avec $u=3$, on a le nombre *impartial* 843.
Il y a donc 3 nombres *impartiaux*.

9. Réponse **E.** $72=1\times2\times2\times2\times3\times3$. Les diviseurs de 72 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.
Voici les possibilités d'obtenir 72 en multipliant trois entiers positifs et la somme correspondant :

$72=72\times1\times1$,	somme 74,	$72=9\times8\times1$,	somme 18,
$72=36\times2\times1$,	somme 39,	$72=9\times4\times2$,	somme 15,
$72=24\times3\times1$,	somme 28,	$72=8\times3\times3$,	somme 14,
$72=18\times2\times2$,	somme 22,	$72=6\times6\times2$,	somme 14,
$72=12\times6\times1$,	somme 19,	$72=6\times4\times3$,	somme 13.
$72=12\times3\times2$,	somme 17,		

L'information donnée par Zoé lorsqu'elle dit « Aujourd'hui, nous avons fêté l'anniversaire de mon aînée » est que ses deux filles les plus âgées n'ont pas le même âge.
Dans le cas correspondant à la réponse E, la somme des âges des trois filles est 14 ($8+3+3$) et il y a une autre possibilité de somme 14 et de produit 72, c'est 6, 6 et 2 ans. Dans un premier temps, Léa ne pouvait conclure ; mais la deuxième possibilité écartée, elle connaît alors les 3 âges.
Dans les 4 autres réponses proposées, de sommes 17, 22, 13 et 18, il n'existe pas, pour la même somme, trois âges dont le produit fait aussi 72.

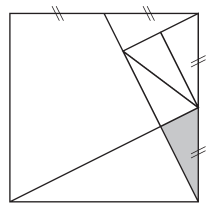
Subsidiaire. Réponse **158.**
- Une calculatrice standard (ici interdite) affiche les nombres jusqu'à 10^{99}. Ainsi : $69\,! \simeq 1{,}711\times10^{98}$.
Et en appuyant trois trentaines de fois sur les touches, on affiche : $70\times71\times72\times\ldots\times99\times100 \simeq 5{,}453\times10^{59}$.
Et $100\,! \simeq 9{,}33\times10^{157}$, soit un nombre de 158 chiffres. La suite des 158 chiffres de ce nombre est exactement :
9332621544394415268169923885626670049071596826438162146859296389521759999322991560894146397615651828
6253697920827223758251185210916864000000000000000000000000.
- Piste pour avoir une évaluation raisonnable et rapide :
$7\,! = 5040$, $10\,! \simeq 5000\times8\times9\times10 \simeq 3{,}6\times10^6$.
$(m+a)(m-a)=m^2-a^2$. Lorsque a n'est pas trop grand, on peut approcher $(m+a)(m-a)$ par m^2 en sachant qu'on est un peu trop grand. On approcherait ainsi : $11\times12\times13\times\ldots\times39\times40$ par 25^{30},
$41\times42\times43\times\ldots\times69\times70$ par 55^{30},
$71\times72\times73\times\ldots\times99\times100$ par 85^{30}.
C'est sûrement trop grand ; arrondissons un peu au-dessous et essayons un produit plus simple :
$30^{30}\times50^{30}\times80^{30} \simeq 120000^{30} \simeq 1{,}2\times10^{150}$. On tombe ainsi à 1 chiffre près du résultat juste.
- Autre piste très courte fondée sur la même idée : 40^{100} n'est sûrement pas une mauvaise approximation et se calcule très vite : $40^{100}=2^{200}\times10^{100}$ et $(2^{10})^{20} \simeq (10^3)^{20} \simeq 10^{60}$. Avec 10^{160}, on est à 3 unités du nombre cherché.

Trophées Kangourou 2008 - Corrigé de l'épreuve Cadets

1. Réponse **C.** $10^{2008}-2008$ a le même nombre de chiffres que 10^{2007}, soit 2008 chiffres.

2. Réponse **B.** L'aire d'une base circulaire étant π, le rayon du cercle d'une base est 1 et son périmètre 2π.
Si h est la hauteur, $2\pi h=\pi$ et $h=\dfrac{1}{2}$.

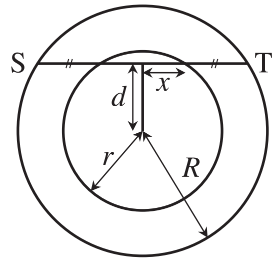
3. Réponse **C.** Selon le découpage ci-contre, l'aire du triangle grisé est un cinquième de l'aire d'un quart de carré.
Elle est donc égale à $\dfrac{1}{20}$.



4. Réponse **A.** Voir question Benjamins 6.

5. Réponse **D.** Le cube initial a un volume égal à 1000.
Le nombre de cubes de volume 1 de la pyramide de cubes otés est : $1+3+6+10+15+21+28+36+45+55$, soit 220.
$1000-220=780$; c'est le volume de l'assemblage restant.

6. Réponse **C.**



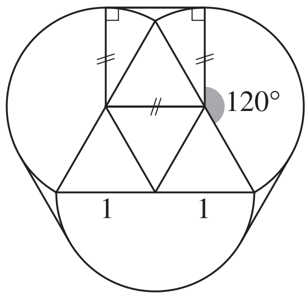
Soit ST une corde qui est découpée en 3 segments de même longueur.
Les deux rayons sont $r=7$ et $R=11$.
On a $ST=6x$.
Par Pythagore : $d^2=r^2-x^2$
et $d^2=R^2-9x^2$.
D'où $8x^2=R^2-r^2=121-49=72$.
$x=3$. $ST=18$.

7. Réponse **D.** Soient x et y les deux nombres. On a $x+y=\frac{3}{2}(x-y)$.

En élevant au carré : $4x^2+4y^2+8xy=9x^2+9y^2-18xy$.

D'où $26xy=5(x^2+y^2)$. $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{26}{5}$.

8. Réponse **D.** $2\pi+3$.



9. Réponse **E.** Raisonnons avec trois dés de couleurs différentes ; chacun peut présenter 6 possibilités ; cela fait 6^3 soit 216 possibilités au total.
On peut faire 12 avec 3 dés en faisant :
$6+5+1$ (6 possibilités : 3 pour le dé montrant 6 multiplié par 2 pour le dé montrant 5),
$6+4+2$ (6 possibilités),
$6+3+3$ (3 possibilités pour le dé montrant 6),
$5+5+2$ (3 possibilités),
$5+4+3$ (6 possibilités),
$4+4+4$ (1 seule possibilité).
Au total : $6+6+3+3+6+1=25$.
La probabilité est donc : $\frac{25}{216}$.

Subsidiaire. Réponse **158.** Voir question subsidiaire Benjamins.

Trophées Kangourou 2008 - Corrigé de l'épreuve Juniors

1. Réponse **B.** $2008=1\times2^3\times251$.
Diviseurs de 2008 : 2008, 1004, 502, 251, 8, 4, 2 et 1.

2. Réponse **D.** $5^6=5^5\times5=3125\times5$, donc 5^6 est la somme de 3125 « cinq ».

3. Réponse **B.** Soient x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point.

On doit avoir $xy=\frac{x}{y}$, soit $y^2=1$, donc y ne peut valoir que 1 ou -1.

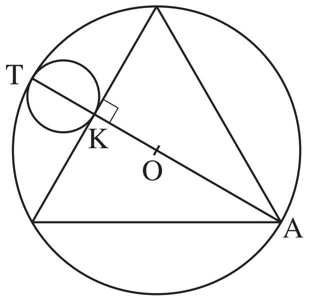
Si $y=1$, alors, comme $xy=x+y$, $x=x+1$, c'est impossible.

Si $y=-1$, alors, comme $xy=x+y$, $-x=x-1$, soit $x=\frac{1}{2}$.

Le point $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ est le seul répondant aux conditions.

4. Réponse **A.** Voir question Benjamins 6.

5. Réponse **B.** Soit R le rayon du grand cercle et r celui du petit.



Le centre O du cercle circonscrit au triangle équilatéral est aussi le point de concours des médianes, donc :

$\text{OK} = \frac{1}{3}\text{AK} = \frac{1}{2}\text{OA} = \frac{R}{2}$.

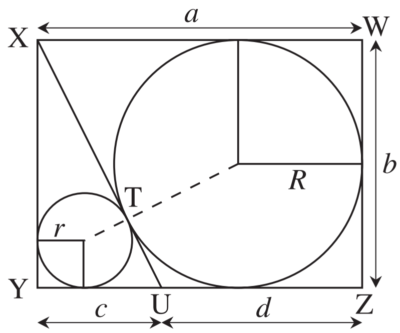
Et $2r = \text{KT} = \text{OT} - \text{OK} = R - \frac{R}{2}$.

Donc $R = 4r$.

L'aire du grand disque est donc égale à 16 fois l'aire du petit.

6. Réponse **C.** Pour la première lettre, on a le choix entre 4 consonnes. Alors, il y a 3 choix possibles pour la consonne en fin de mot. Et il reste 5 lettres différentes à placer (soit 5! = 120 possibilités). Au total $4 \times 3 \times 120$.
Mais on a ainsi compté 2 fois chaque mot car la lettre D est présente 2 fois. Finalement :
on peut former $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 120$ soit 720 mots différents de 7 lettres.

7. Réponse **E.** C'est E qui est fausse, comme on pourrait le voir tout de suite :



si $d = R + r$, alors $r = \text{TU}$ et $\text{XY} = \text{XU}$, ce qui est impossible.
Et les autres égalités sont vraies.
A est vraie : $2R = b$.
B est vraie : avec X, sommet du rectangle, et T, point de tangence commune, on a $\text{XT} = a - R = b - r$; donc $a - b = R - r$.

C est une conséquence de A et B : $r = \frac{3b}{2} - a$.

On a $\text{YZ} = a = r + (2 \times \text{TU}) + R$. $\text{TU} = \frac{a - R - r}{2} = a - b = R - r$.

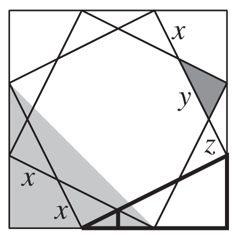
Et $c = \text{YU} = r + (R - r) = R$. D est donc vraie aussi.

8. Réponse **D.** Le nombre de choix de 3 points parmi 40 est : $\frac{40 \times 39 \times 38}{1 \times 2 \times 3}$.

Trois points du polygone régulier forment un triangle rectangle si deux sont opposés (20 possibilités de choix), le troisième pouvant être quelconque parmi les 38 restants. On peut ainsi choisir 20×38 triangles rectangles différents.

La probabilité cherchée est donc : $\frac{20 \times 38 \times 2 \times 3}{40 \times 39 \times 38} = \frac{1}{13}$.

9. Réponse **E.** Nous allons calculer les longueurs x, y et z des côtés des petits triangles de la figure. $\mathscr{A}$ étant leur aire, l'aire cherchée sera $4\mathscr{A}$ ôtée de l'aire d'un carré de côté $x + y + z$.

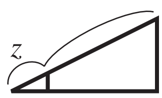


$x + y + z$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés mesurent $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, donc égale $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Dans le triangle en gris clair sur la figure ci-dessus, deux médianes sont tracées et se coupent de manière que x soit le tiers de leur longueur.

On a donc $x = \frac{1}{3}(x + y + z) = \frac{\sqrt{5}}{9}$.

Dans le triangle en traits épais, on a par Thalès : $\frac{z}{x + y + z} = \frac{1/6}{4/6} = \frac{1}{4}$. Et $z = \frac{\sqrt{5}}{12}$.



Oh ! Les petits triangles rectangles sont des triangles (3,4,5).

L'aire cherchée est $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{9} \times \frac{\sqrt{5}}{12} = \frac{5}{9} - \frac{5}{9 \times 6} = \frac{25}{54}$. (Par Pythagore, on peut y arriver aussi).

Subsidiaire. Réponse **158.** Voir question subsidiaire Benjamins.