KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

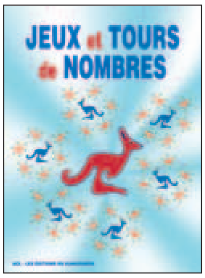
LES TROPHÉES KANGOUROU 2011

KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1991 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, plus de trois cents mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

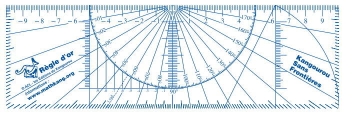
Il a été étendu à toute l'Europe et ailleurs et réunit maintenant plus de 6 millions de participants dans 52 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.math-ksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.

Le jeu-concours Kangourou 2012 aura lieu le jeudi 15 mars 2012.



Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !

Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).



De plus, cette année, les 16000 élèves ayant répondu juste aux 8 premières questions (faciles) ont reçu un livre (*51 expressions et leurs jeux mathématiques*).
Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur cinq reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation au week-end parisien des *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).

Le Kangourou : des services Internet sur www.mathkang.org
- les inscriptions et leur suivi possibles sur internet,
- les résultats complets, avec édition électronique des diplômes,
- les annales complètes répertoriées, sélectionnables, et téléchargeables,
- des animations mathématiques devenues célèbres et utilisées dans les classes par de nombreux professeurs (Thalès, Pythagore, Archimède, …).

Après l'épreuve des *Trophées*, les élèves et les invités ont écouté la conférence de Cédric Villani (médaille Fields 2010) : *Des triangles et des gaz.*

Trophées Kangourou 2011 - Corrigé de l'épreuve B (6e - 5e)

1. Réponse **E.** Seules les réponses D et E ont un ordre de grandeur plausible (supérieur à $100 \times 100 \times 100$, soit 1 000 000). On peut faire l'opération ou remarquer que seul E est multiple de 3 (ce qui est le cas de chaque facteur 111).

2. Réponse **D.** On vérifie facilement que l'on peut réaliser les formes A, B, C et E. Dans D, pour tous les placements possibles (4) de la pièce en forme de T, il reste des cases isolées.

3. Réponse **B.** Les 2 premières phrases se contredisent : l'une est fausse et l'autre vraie. Du coup, la phrase d'Alice est fausse et celle du Lapin Blanc aussi.

4. Réponse **B.** La flèche s'obtient en ôtant du carré trois triangles rectangles ayant chacun une aire valant le quart de celle du carré. L'aire de la flèche vaut donc elle aussi un quart de celle du carré, soit 18 cm^2 ($72 \div 4 = 18$).

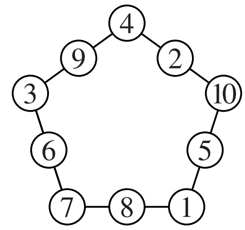
5. Réponse **E.** Paris-Rennes (300 km) est parcouru en 3 h à 100 km/h.

Durée du trajet, à 90 km/h : $\frac{300}{90}$ h = $\frac{10}{3}$ h = 3 h et 20 min. Le trajet a duré 20 minutes de plus.

6. Réponse **D.** L'aire du nouveau solide est diminuée de 2 carrés de 5 cm × 5 cm, soit 2 fois un quart de face du cube initial. Le solide a perdu une demi-face, soit un douzième de l'aire totale du cube initial.

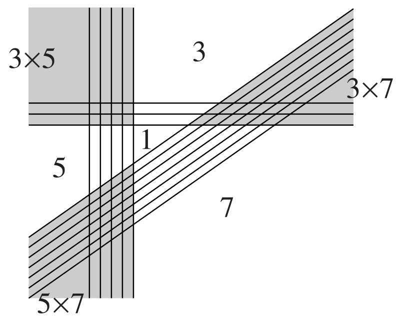
7. Réponse **B.** Il faut remarquer que RRR est un multiple de 111 et qu'il est impair (sinon le produit serait pair). En divisant 742257 par 111, on trouve 6687 qui n'a pas la forme demandée. PPPQ peut donc être le quotient de 6687 par 3, 5, 7 ou 9. Or 6687 n'est pas divisible par 5 et son quotient par 7 ou 9 n'a pas 4 chiffres.
Et on a bien 6687/3 = 2229 qui a la forme demandée. Donc R = 3, P = 2, Q = 9 et 3 + 2 + 9 = 14.

8. Réponse **D.** 3 et 4 sont sur un même côté et 9 est le plus grand des nombres restant à placer, donc la somme sur un côté du pentagone vaut au plus 4 + 3 + 9 = 16.
Donc la case entre le 4 et le 10 est occupée soit par un 1 (somme 15) soit par un 2 (somme 16).
Si la somme est 15, on ne peut plus alors placer le 9. Donc la somme est 16 et donne une solution unique avec 1 sur le cinquième sommet du pentagone (voir dessin ci-contre).



9. Réponse **E.** Lorsqu'on colorie en gris la case centrale, cela rapporte 8 au total de la grille.
Lorsqu'on colorie en gris une case du coin, cela rapporte 3 au total de la grille.
Lorsqu'on colorie en gris une case du milieu d'un côté, cela rapporte 5 au total de la grille.
À partir de 8, 3 et 5, un total de 17 ne peut être obtenu que de deux manières :
17 = 8 + 3 + 3 + 3, c'est-à-dire en coloriant la case centrale et 3 cases des milieux de côté ; cela peut se faire de 4 façons différentes.
17 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3, c'est-à-dire en coloriant les 4 cases des coins et 1 case au milieu d'un côté ; cela peut se faire de 4 façons différentes.
Il y a donc 4 + 4, soit 8 coloriages différents.

Subsidiaire. Réponse **87.**
La figure ci-contre montre comment minorer le nombre de ces régions :
Dans les parties grisées, le nombre de régions est 3×5, 3×7 et 5×7.
Il y a une région centrale ; et enfin on voit les 3, les 5 et les 7 régions qui restent.
Au total : 15 + 21 + 35 + 1 + 3 + 5 + 7, soit 87 régions.
Il s'agit d'un théorème de Steiner (qu'il énonce en 1826 dans le *Journal* de Crelle) :
Si on trace dans un plan n systèmes de $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ parallèles, chaque système ayant une direction différente, le plan sera partagé, au plus, en 1 + U + A régions ;



$U = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $A = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n$ (somme de $\frac{n(n-1)}{2}$ termes) ;

2U régions sont infinies et A + 1 – U fermées au plus.
Ici : $n = 3$; $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$; U = 3 + 5 + 7 = 15 ; A = 15 + 21 + 35 = 71 ; 1 + U + A = 87.
La démonstration générale est fondée sur le même principe que la figure ci-dessus, après avoir montré qu'il n'y a pas de figure où l'on pourrait voir plus de régions.

Trophées Kangourou 2011 - Corrigé de l'épreuve C (4e - 3e)

1. Réponse **D.** D vaut $\frac{1}{30}$; A et C valent $\frac{1}{50}$; et B et E $\frac{1}{60}$.

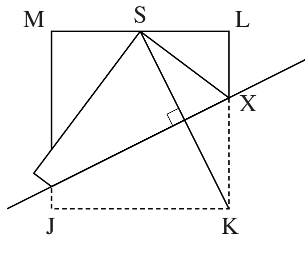
2. Réponse **E.** 1 – 32 + 81 – 64 + 25 – 6 = 107 – 102 = 5.

3. Réponse **D.** Avec AEB équilatéral et ABCD carré, EBC isocèle en C et ECF isocèle en E, on a :

$\widehat{EBC} = 90° - 60° = 30°$. $\widehat{BEC} = \widehat{ECB} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. $\widehat{CEF} = 180° - 2 \times 75° = 30°$. Et $\widehat{BEF} = 75° - 30° = 45°$.

4. Réponse **E.** Si d est le chiffre des dizaines de N et u celui des unités, $N = 10d + u$ et $M = 10u + d$.
$M + N = 11d + 11u = 11(d + u)$. Si $M + N$ est le carré d'un entier, $d + u$ (qui est inférieur à 20) ne peut valoir que 11.
Ce qui donne pour N les 8 possibilités : 29 ; 38 ; 47 ; 56 ; 65 ; 74 ; 83 et 92.

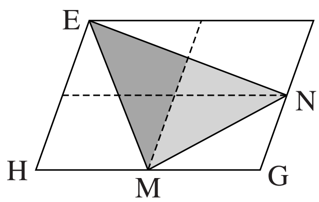
5. Réponse **C.** Si on pose $LX = x$, on a $SX = XK = 56 - x$. Et on a $SL = \frac{56}{2} = 28$.



Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle SXL donne :
$(56 - x)^2 = 28^2 + x^2$. D'où $56^2 - 2 \times 56x = 28^2$; $28 - x = 7$, soit $x = 21$.
Et $SX = 56 - 21 = 35$.

6. Réponse **D.** Soit m la moyenne des 28 derniers nombres.
On a alors $\frac{36\times 36+28m}{64}=64$ d'où $m=\frac{64^2-36^2}{28}=\frac{100\times 28}{28}=100$.

7. Réponse **C.** Traçons la figure avec les médianes du parallélogramme.
Si l'aire de EFGH était l'unité, alors :



$\text{Aire(EMN)} = 1 - \text{Aire(EFN)} - \text{Aire (EHM)} - \text{Aire (MNG)} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Donc $\text{Aire(EFGH)} = \frac{8}{3} \times 12 \text{ cm}^2 = 32 \text{ cm}^2$.

8. Réponse **D.** Du 1$^{\text{er}}$ janvier 2000 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2011, il s'est écoulé 11 années, dont 3 bissextiles (2000, 2004 et 2008) ; cela fait $11\times 365 + 3 = 4018$ jours.
Du 1$^{\text{er}}$ janvier 2011 au 4 juin 2011 à 0h, il y a eu : $31+28+31+30+31+3=154$ jours.
Soit 4172 jours complets, auxquels il faut rajouter 15 h : $4172\times 24+15=100\,143$.
100 143 heures se sont écoulées (ou 1 heure de moins dans les pays ayant une heure d'été).

9. Réponse **D.** Le plus petit produit possible est $1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7=5040$.
On peut remplacer 6 et/ou 7 par 8 et/ou 9, le résultat reste inférieur à 10 000 (en effet $1\times 2\times 3\times 4\times 5=120$, $120\times 8=960$ et $960\times 9<10\,000$. Cela fait donc 6 possibilités (2 chiffres choisis parmi 4).
Si on remplace 4 par 8, on trouve 10080 (on doit donc garder $1\times 2\times 3\times 4$ dans le produit).
Pour trouver d'autres possibilités, on ne peut donc que remplacer 5 par 8 ou par 9 et remplacer $5\times 6\times 7$…
… soit par $8\times 6\times 7$ (qui reste autour de 8000), et ensuite $8\times 6\times 9$ (égal à $5040\times 72\div 35$) dépasse 10 000,
… soit par $9\times 6\times 7$ (qui reste autour de 9000), et ensuite $9\times 6\times 8$, déjà calculé, dépasse 10 000.
Au total, il y a donc $6+2$, c'est-à-dire 8 possibilités.

Subsidiaire. Réponse **99.**
On trouve facilement que…
Les cordes joignant 2 points sur un cercle peuvent, au plus, partager le disque en 2 régions.
Les cordes joignant 3 points sur un cercle peuvent, au plus, partager le disque en 4 régions.
Les cordes joignant 4 points sur un cercle peuvent, au plus, partager le disque en 8 régions.
Les cordes joignant 5 points sur un cercle peuvent, au plus, partager le disque en 16 régions.
Les cordes joignant 6 points sur un cercle peuvent, au plus, partager le disque en 31 régions.
À partir de $n=6$ points, le nombre de régions est inférieur à 2^{n-1}.
On devait donc parier sur un nombre un peu inférieur à 128.
(Comme pour la question subsidiaire du sujet B (6$^{\text{e}}$ - 5$^{\text{e}}$), on pouvait aussi essayer de compter effectivement le nombre de ces régions sur un dessin, en comptant une région de plus lorsque trois cordes sont pratiquement concourantes.)
Le nombre exact pour n points est la somme des 5 premiers nombres de la $n^{\text{ième}}$ ligne du « triangle de Pascal ».
On a : avec 7 points, 57 régions ; avec 8 points, 99 régions ; avec 11 points, 386 régions (bien inférieur à $2^{10}=1024$).
Voyez la démonstration sur www.mathkang.org

Trophées Kangourou 2011 - Corrigé de l'épreuve J (Lycées)

1. Réponse **E.** B et D sont divisibles par 2, A par 5 et C par 3. Reste E qui est premier si le Kangourou ne s'est pas trompé (ce qui est le cas évidemment).

2. Réponse **E.** La droite doit croiser les axes en (–3 ; 0) et (0 ; 6) ce qui correspond, compte-tenu de l'inversion des axes, au tracé E.

3. Réponse **E.** Ce qui est rigolo dans ce découpage, c'est que chacun des morceaux a une aire égale au sixième du carré.

4. Réponse **B.** Il est facile de voir que le triangle isocèle d'angle au sommet 120° se découpe aisément pour reconstituer le triangle équilatéral.
Si on veut s'assurer qu'il n'y a pas d'autre possibilité, on peut utiliser la formule :
$\text{Aire(ABC)} = \frac{1}{2}(\text{AB}\times\text{AC}\times\sin\widehat{\text{A}})$ où $\text{AC}\times\sin\widehat{\text{A}}$ est bien la longueur de la hauteur issue de C.

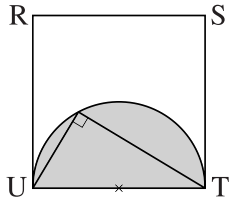
5. Réponse **E.** Comme $50° > 45°$, $\cos(50°) < \sin(50°)$. Donc $\text{E} > \text{D} > 1 > \text{B} > \text{A}$.
Et $\text{C} = \tan(50°) = \frac{\sin(50°)}{\cos(50°)} < \frac{1}{\cos(50°)}$ donc $\frac{1}{\cos(50°)}$ est le plus grand des cinq nombres.

6. Réponse **D.** Soit a, b et c les trois premiers termes. Les suivants sont :

rang	1	2	3	4	5	6	7	8
terme	a	b	c	$a+c$	$a+b+c$	$a+b+2c=(a+b+c)+c$	$2a+b+3c=(a+b+c)+(a+2c)$	$3a+2b+4c$

Le 7$^{\text{ème}}$ et le 8$^{\text{ème}}$ nombre étant égaux, on a : $a+b+c=0$. Et le 7$^{\text{ème}}$ nombre est $a+2c=c-b$.
Donc la phrase A et la phrase B sont vraies, ainsi que la C et la E. La D est fausse car $b \neq c$.

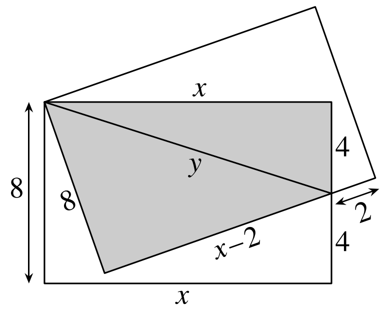
7. Réponse **D.** Les points de l'intérieur du carré (de côté 1) tels l'angle UMT soit droit forment un demi-cercle de diamètre [TU].



L'angle $\widehat{\mathrm{UMT}}$ sera aigu si on choisit M à l'extérieur du demi-disque de diamètre [TU].

L'aire de ce demi-disque vaut $\frac{\pi}{8}$. Par conséquent, la probabilité cherchée vaut $1-\frac{\pi}{8}$.

8. Réponse **D.** Appelons x la longueur du grand côté du rectangle et y l'hypoténuse commune aux 2 triangles rectangles qui se partagent la zone grisée.

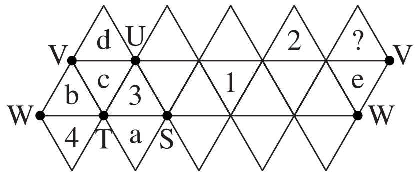


Les longueurs indiquées sur le dessin se calculent alors aisément.
Appliquons deux fois le théorème de Pythagore :
$y^2=x^2+16$ et $y^2=(x-2)^2+64$.
D'où $x^2+16=(x-2)^2+64$ et donc : $x=13$.

Les triangles rectangles ont donc des aires de $\frac{13\times 4}{2}=26$ et $\frac{8\times 11}{2}=44$.

L'aire de la zone grisée vaut donc $26+44$, soit 70.

9. Réponse **D.** Les noms donnés à certains sommets et faces de l'icosaèdre sont indiqués sur la figure ci-dessous.
Autour de chaque sommet, chaque nombre ne peut figurer que sur une seule face.



Il faut un 1 autour du sommet S ; il ne peut se trouver qu'en a.
Autour du sommet T, les faces b et c portent 2 et 5.
Il faut un 1 autour du sommet U ; il ne peut être qu'en d.
Autour du sommet V, 3 et 4 sont sur les faces nommées e et « ? ».
Comme 4 n'est pas en e (autour du sommet W), il est sur la face « ? ».
Les autres faces se remplissent alors facilement.

Subsidiaire. Réponse **93.**
• Sur une droite, n points déterminent S_n régions-à-1-dimension (segments ou demi-droites). On a : $S_n=n+1$.
• Dans le plan, n droites déterminent R_n régions-à-2-dimensions (finies ou infinies). Supposons $n-1$ droites tracées ; une n-ième droite (quelconque) les coupe toutes en $n-1$ points déterminant S_{n-1} régions-à-1-dimension, chacune partageant une région-à-2-dimensions en deux ; ce qui augmente de S_{n-1} le nombre de régions-à-2-dimensions.

On a donc : $R_n=1+S_0+S_1+S_2+\ldots+S_{n-1}=1+1+2+3+\ldots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}$.

[On peut aussi démontrer, par exemple par récurrence, que $R_n=\frac{n^2+n+2}{2}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=1+\binom{n+1}{2}$.]

• Dans l'espace, n plans déterminent Q_n régions-à-3-dimensions (finies ou infinies). Supposons $n-1$ plans tracés ; un n-ième plan (quelconque) les coupe tous en $n-1$ droites déterminant R_{n-1} régions-à-2-dimensions, chacune partageant une région-à-3-dimensions en deux ; ce qui augmente de R_{n-1} le nombre de régions-à-3-dimensions.
On a donc : $Q_n=1+R_0+R_1+R_2+\ldots+R_{n-1}$.
Voici le tableau des S_n, des R_n et des Q_n, calculés jusqu'à $n=10$ (d'après les formules trouvées, chaque case des deux dernières lignes est la somme des deux cases à gauche, sur la même ligne et au-dessus) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R_n	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56
Q_n	1	2	4	8	15	26	42	64	93	130	176

[On peut démontrer, par exemple par récurrence, que $Q_n=\frac{n^3+5n+6}{6}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{3}$.]