**KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES**
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

LES TROPHÉES KANGOUROU 2012

KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1991 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, plus de trois cents mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

Il a été étendu à toute l'Europe et ailleurs et réunit maintenant plus de 6 millions de participants dans plus de 50 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.math-ksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.

***Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !***
Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).

Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur quatre reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation au week-end parisien des *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).

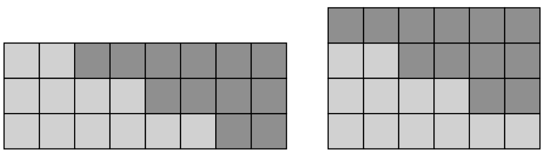

***Le Kangourou : des services Internet sur www.mathkang.org***

***Jeu-concours Kangourou 2013 : jeudi 21 mars 2013.***

## Trophées Kangourou 2012 - Corrigé de l'épreuve Benjamins ($6^e$ - $5^e$)

**1.** Réponse **D.** L'égalité s'écrit $(3\times9)\times(5\times24)\times N = (24\times4)\times(3\times5\times5)\times(4\times9)$. D'où $N = 4\times5\times4 = 80$.

**2.** Réponse **D.** Une pièce est constituée de 12 petits carrés, donc un rectangle, formé avec 4 pièces, est constitué de 48 petits carrés. Les dimensions du rectangle, de largeur minimale 3, peuvent être $3\times16$, $4\times12$ ou $6\times8$. Et on peut former ces 3 rectangles : on peut commencer par combiner deux pièces pour obtenir un rectangle, ce qui peut se faire de 2 façons (rectangle de 3 sur 8 ou de 4 sur 6) :

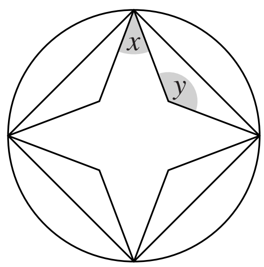


Et chacun de ces rectangles peut se doubler de deux façons (par la longueur ou par la largeur), on obtient alors d'une part des rectangles $3\times16$ et $6\times8$, d'autre part des rectangles $4\times12$ et $8\times6$ (ce qui fait 3 rectangles différents).

**3.** Réponse **E.** Entre 1 et 10 000, le plus petit multiple de 9 est $9\times1$ et le plus grand est $9\times1111$. Les multiples de 9 sont donc au nombre de 1111 sur 10 000, soit 11,11 %.

**4.** Réponse **D.** Les angles au sommet des triangles isocèles d'angle $y = 110°$ mesurent :

$$\frac{180° - 110°}{2} = 35°.$$




Les quatre sommets de l'étoile, sur le cercle, forment un carré ; chaque angle droit du carré contient l'angle $x$ et deux angles de 35°. L'angle $x$ vaut donc $90° - 2\times35°$, soit 20°.

**5.** Réponse **E.** $24{,}2 - 18{,}8 = 5{,}4$. Le poids de la moitié du contenu de la boîte est 5,4 kg.
Le poids de la boîte, en kg, est donc $18{,}8 - 5{,}4$ soit 13,4.

**6.** Réponse **E.** Une simple multiplication à la main de 22…23 par 9 montre ce que suggèrent les remarques : 200…07 = $3 \times 3 \times$ 22…23, le nombre de 0 étant égal au nombre de 2.
Pour qu'un nombre de la forme $3 \times 3 \times$ 22…23 soit multiple de 81, il faut que 22…23 soit multiple de 9 ; cela se produit :
- s'il y a trois « 2 » (la somme des chiffres de 2223 vaut alors 9 ; 20 007 est donc multiple de 81 mais n'est pas proposé) ;
- s'il y a douze « 2 » (somme des chiffres égale à 27), ce qui correspond à la proposition de réponse E qui comporte douze zéros ;
- s'il y a vingt et un « 2 »…

**7.** Réponse **D.** La somme totale des neuf nombres est 110. Soit $n$ le nombre de la liste non choisi. La somme d'Alice valant 3 fois celle de Matt, $110 - n$ est un multiple de 4. Parmi 1, 3, 7, 8, 9, 11, 14, 25, 32, cela ne se produit que pour le nombre14. La somme d'Alice devrait alors valoir 72 et celle de Matt 24 ; et cela est bien possible (avec 7, 8, 25, 32 pris par Alice, et 1, 3, 9, 11 pris par Matt).

**8.** Réponse **E.** Le nombre de poissons doit être multiple de 3 (un tiers de sardines, deux tiers d'anchois), le nombre de sardines doit être multiple de 5 et le nombre d'anchois multiple de 7. Raisonnons sur un nombre de poissons à la fois multiple de 3, de 5 et de 7, par exemple 105. Avec 105 poissons, il y a 35 sardines et 70 anchois. Sur 35 sardines, Baya en mange 21 ($3 \times 7$) et Mako 14 ($2 \times 7$). Et sur 70 anchois, Baya en mange 30 et Mako 40.
Mako a donc consommé $\frac{54}{105}$ poissons, soit $\frac{18}{35}$. On peut aussi calculer $\left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{14 + 40}{105} = \frac{18}{35}$.

**9.** Réponse **D.** On peut suivre, par la pensée, ce que devient la face du dessous à partir de chacune des positions initiales :
Partant de la position 1, la même face se retrouve au-dessous en position 7 (elle est à gauche en 2 et 3, se retrouve à droite en 5, donc aussi à droite en 6, puis au-dessous en 7).
Partant de la position 2, la même face se retrouve au-dessous en position 6.
Partant de la position 3, la même face se retrouve au-dessous en position 8.
Partant de la position 4, la même face se retrouve au-dessous en position 11.
Partant de la position 5, la même face se retrouve au-dessous en position 10.
Seule la position 9 a été occupée par une face qui n'en a occupé aucune autre.

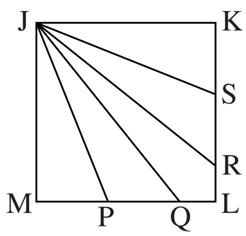
**Subsidiaire.** Réponse **7.**
Supposons que la somme que possèdent Milo et Zoé soit 1.
Si Milo avait 2/3, et Zoé 1/3, ils échangeraient indéfiniment 1/3 qui passerait successivement de l'un à l'autre.
Supposons que Milo ait $2/3 + x$ et Zoé $1/3 - x$.
Après la première étape, Milo a $1/3 + x/2$ et Zoé $2/3 - x/2$.
Et après un échange complet, Milo a $2/3 + x/4$ et Zoé $1/3 - x/4$.
Donc, chaque jour, la différence entre ce qu'a Milo et 2/3 est divisée par 4.
Dans notre cas, où Milo et Zoé ont en tout 10000, la différence entre ce qu'a Milo et $(2/3) \times 10000$ est divisée par 4 chaque jour ; elle est au début de $(1/3) \times 10000$ et la question est de savoir quand elle sera inférieure à 1/3, c'est-à-dire quand elle aura été divisée par 10000.
Or $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$, $4 \times 1024 = 4096$ et $4 \times 4096$ dépasse 10000.
Milo aura donc moins de 6667 après 7 jours.
Les échanges entre Milo et Zoé sont détaillés ci-contre (on a décidé d'arrondir, si besoin, à l'avantage du receveur).

| | Milo | Zoé |
|---|---|---|
| | 10000 | 0 |
| *1er échange* | 5000 | 5000 |
| | 7500 | 2500 |
| *2e échange* | 3750 | 6250 |
| | 6875 | 3125 |
| *3e échange* | 3437,50 | 6562,50 |
| | 6718,75 | 3281,25 |
| *4e échange* | 3359,37 | 6640,63 |
| | 6679,69 | 3320,31 |
| *5e échange* | 3339,84 | 6660,16 |
| | 6669,92 | 3330,08 |
| *6e échange* | 3334,96 | 6665,04 |
| | 6667,48 | 3332,52 |
| *7e échange* | 3333,74 | 6666,26 |
| | 6666,87 | 3333,13 |

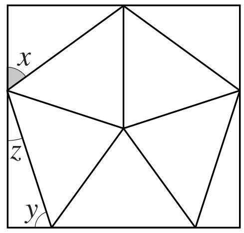
## Trophées Kangourou 2012 - Corrigé de l'épreuve Cadets (4e - 3e)

**1.** Réponse **B.** Pour être divisibles par 6, les nombres doivent être divisibles par 2, donc se terminer par 0 ou 2 et divisibles par 3, donc avoir une somme des chiffres multiples de 3. Leurs trois chiffres sont alors, ou bien les chiffres 1, 2 et 3 (et ce peuvent être 312 ou 132), ou bien les chiffres 0, 1 et 2 (et ce peuvent être 210, 120 ou 102).

**2.** Réponse **D.** Aire(JMP) = Aire(JPQ) donc MP = PQ.
Le quadrilatère JRLQ est partagé par la diagonale [JL] en 2 triangles de même aire, aire valant la moitié des aires des autres triangles.
Si Aire(JQL ) $= \frac{1}{2}$ Aire(JPQ), on a QL $= \frac{1}{2}$ PQ. D'où QL $= \frac{1}{5}$ ML = 2 cm. De même RL = 2 cm.
Et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle QRL, QR $= \sqrt{8}$ cm.



**3.** Réponse **D.** $10000 = 73 \times 136 + 72$. Cela veut dire qu'il y a 136 multiples de 73 entre 1 et 10 000, soit 136/10000 ou 1,36 %.




**4.** Réponse **A.** Les angles d'un pentagone régulier mesurent 108° $\left(108° = 180° - \dfrac{360°}{5}\right)$.
L'angle $y$, supplémentaire de 108°, mesure 72°.
L'angle $z$, complémentaire de $y$, mesure 18°.
Et l'angle $x$ demandé mesure $180° - (18° + 108°) = 180° - 126° = 54°$.

**5.** Réponse **C.** La somme des trois nombres $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$ est $\dfrac{13}{12}$ et leur moyenne vaut donc $\dfrac{13}{36}$.
La somme des deux nombres $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}$ est $\dfrac{7}{10}$ et leur moyenne vaut donc $\dfrac{7}{20}$.
La différence entre ces deux moyennes vaut $\dfrac{65}{180} - \dfrac{63}{180} = \dfrac{2}{180} = \dfrac{1}{90}$.

**6.** Réponse **E.** Soit $\ell$ la largeur et $L$ la longueur des rectangles. On a : $y = \ell + L$ et $x = L - \ell$.
D'où, en ajoutant, $x + y = 2L$. Et $L = \dfrac{x+y}{2}$.

**7.** Réponse **D.** Les cinq phrases ne peuvent pas être vraies simultanément ; en effet, si $a$ et $b$ sont strictement négatifs et $a < b$, alors en divisant par $ab$ positif, $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.
Mais les 4 phrases $a < 0$, $b < 0$, $a < b$ et $a^2 > b^2$ peuvent être vraies en même temps (par exemple avec $a = -2$ et $b = -1$).

**8.** Réponse **B.** De la première phrase, Matt déduit qu'Alice n'a pas le nombre 1 (sinon elle saurait qu'il a lui le nombre 2).
De la deuxième phrase, Alice déduit que Matt n'a pas le nombre 1 (même raisonnement que ci-dessus), ni le nombre 2 (puisque, s'il avait le 2, il saurait qu'Alice, n'ayant pas le nombre 1, aurait le 3).
Puisque, sachant que Matt n'a ni 1, ni 2, Alice peut conclure, c'est :
- soit qu'elle a le 2 mais alors, elle en conclurait que Matt a le 3 (ce qui n'est pas le cas car 3 n'est pas un diviseur de 20) ;
- soit qu'elle a le 3 et Matt le 4.

**9.** Réponse **C.** Soit $v$ la vitesse de marche de Nicolas ; sa vitesse de course est $2v$.
Soit $T$, en min, son temps de parcours du lundi ; ce jour, il a donc couru pendant $T/3$ et marché pendant $2T/3$.
La distance parcourue le lundi vaut alors $2v \times T/3 + v \times 2T/3$, soit $4vT/3$.
Et, le mardi, cette même distance vaut $2v \times 2(T-6)/3 + v \times (T-6)/3$ soit $5v(T-6)/3$.
On a donc, après simplification par $v/3$ :
$4T = 5(T-6)$, d'où $T = 30$.
En appelant $X$ le temps de parcours du mercredi, la même distance parcourue vaut
$vX = 4vT/3$ ; d'où $X = 4T/3 = 40$. Pour aller à l'école le mercredi, Nicolas a mis 40 min.

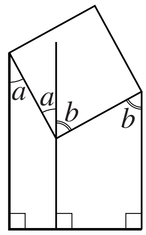
**Subsidiaire.** Réponse **99.**
Avec quatre chiffres significatifs, on a : $6^{99} \approx 1{,}089 \times 10^{77}$. (Remarque : $6^9 \approx 1{,}008 \times 10^7$.)
Pistes pour une approximation :
• on sait que $2^{10}$ vaut environ $10^3$ (exactement 1024 et 1000) et que $3^4$ vaut environ $2^3 \times 10$ (exactement 81 et 80).
$6^4$ est donc proche de $2^7 \times 10$ ; et $6^{40}$ est proche de $2^{70} \times 10^{10}$, qui est proche de $\left(10^3\right)^7 \times 10^{10}$, soit $10^{31}$.
$6^{20}$ est proche de $\sqrt{10^{31}}$ soit $10^{15} \times \sqrt{10}$.
$10^{77} = 10^{31} \times 10^{31} \times 10^{15}$ est donc proche de $6^{40} \times 6^{40} \times 6^{20}/\sqrt{10}$, donc de $3 \times 6^{99}$.
• $2^{100} = \left(2^{10}\right)^{10}$ est légèrement supérieur à $10^{30}$.
$3^{100} = \left(3^4\right)^{25}$ est légèrement supérieur à $\left(2^3 \times 10\right)^{25} = 2^{75} \times 10^{25}$, lui même légèrement supérieur à $32 \times 10^{21} \times 10^{25} = 32 \times 10^{46}$.
Donc $6^{100}$ est légèrement supérieur à $3{,}2 \times 10^{77}$.

## Trophées Kangourou 2012 - Corrigé de l'épreuve Lycées

**1.** Réponse **B.** Appelons $P$ le prix d'achat du tableau en €.
Alors le prix de vente escompté est $1{,}1P$. Le prix de vente réel est $1{,}1P - 500$, soit $0{,}85P$. Donc $0{,}25P = 500$ ; $P = 2000$.

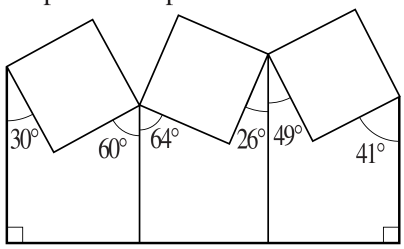
**2.** Réponse **D.** Il y a $12 \times 12 \times 12$ petits cubes ayant chacun 12 arêtes d'1 cm de côté. La longueur totale de ces arêtes est donc de $(12 \times 12 \times 12) \times 12$ cm.

**3.** Réponse **B.** Si $n$ est un entier pair ($n=2p$) alors $n^n=n^{2p}=\left(n^p\right)^2$ est toujours le carré d'un entier.
Cela fait déjà 50 entiers entre 1 et 100 satisfaisant la condition demandée.
Si $n$ est impair ($n=2p+1$) alors $n^n=n\times n^{2p}=n\times\left(n^p\right)^2$, qui n'est un carré que si $n$ est lui-même un carré.
Il y a 5 nombres impairs entre 1 et 100 qui sont le carré d'un entier (1, 9, 25, 49 et 81).
Cela fait, au total, 55 nombres satisfaisant la condition demandée.




**4.** Réponse **B.** Dans la figure ci-contre, les angles $a$ et $b$ sont complémentaires puisque leurs angles alternes-internes le sont.
En rajoutant des droites parallèles aux poteaux passant par les sommets « inférieurs » des carrés, on peut ainsi calculer les angles de proche en proche :

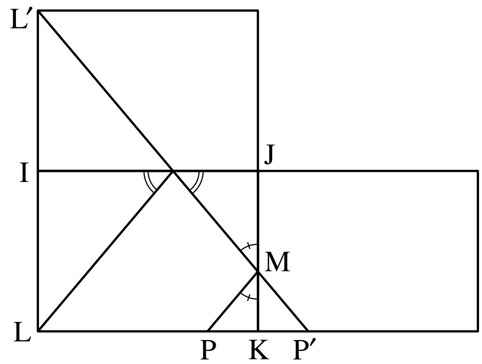
$90° - 30° = 60°$,
$124° - 60° = 64°$,
$90° - 64° = 26°$,
$75° - 26° = 49°$,
$90° - 49° = 41° = a_4$.



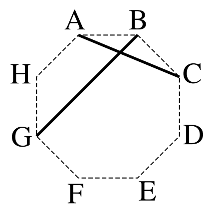

**5.** Réponse **D.** $2013 = 4\times 503+1$. 2013 est le 504ème nombre écrit.
Sur les $n$ premières lignes du tableau triangulaire sont écrits $n^2$ nombres [en effet $n^2$ est bien la somme des $n$ premiers nombres impairs ; de nombreuses démonstrations existent, par exemple par récurrence en remarquant $(n+1)^2=(n^2)+(2n+1)$].
Or $23^2=529$ et $22^2=484$. Le 504ème nombre est donc écrit sur la 23ème ligne en position $504-484$, c'est-à-dire en 20ème position.

**6.** Réponse **B.** Autour du sommet commun aux 3 polygones réguliers, il y a 360° ; les 90° du carré et les 120° de l'hexagone laissent place à 150° pour glisser l'angle du 3ème polygone. Un polygone régulier dont les angles mesurent 150° est un polygone à 12 côtés (un dodécagone). En effet, si $n$ est le nombre de côtés du polygone, l'angle du polygone vaut, en degrés, $180-\dfrac{360}{n}$ ; et si $180-\dfrac{360}{n}=150$, $\dfrac{360}{n}=30$ et $n=\dfrac{360}{30}=12$.

**7.** Réponse **B.** On « déplie » le billard.
Soit P′ le symétrique de P par rapport à (KJ)
et L′ le symétrique de L par rapport à (IJ).
On cherche KM.
Le théorème de Thalès donne $\dfrac{\mathrm{KM}}{\mathrm{LL'}}=\dfrac{\mathrm{KP'}}{\mathrm{LP'}}$.
D'où, en centimètres, $\dfrac{\mathrm{KM}}{300}=\dfrac{60}{360}$.
Et KM = 50 cm.




**8.** Réponse **D.** Si le premier tirage est C ou H, aucun second tirage ne fournira la configuration en 3 régions demandée.
Si le premier tirage est D, 1 seul second tirage (D) fournit un découpage en 3.
Si le premier tirage est E, 2 seconds tirages (D et E) fourniront un découpage en 3.
Si le premier tirage est F, 3 seconds tirages (D, E et F) fourniront un découpage en 3.
Si le premier tirage est G, 4 seconds tirages (D, E, F et G) fourniront un découpage en 3.




Le nombre de configurations satisfaisantes est $1+2+3+4$, soit10, sur un total de $6\times 6$, soit 36 tirages possibles. Et $\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$.

**9.** Réponse **A.** On peut remarquer que $(a+1)(b+1)(c+1) = abc+ab+bc+ac+a+b+c+1$.
L'équation donnée est donc équivalente à $(a+1)(b+1)(c+1) = 2013 = 3\times 671 = 3\times 11\times 61$ (seule décomposition de 2013 en produit de 3 nombres strictement supérieurs à 1).
Les trois nombres $a$, $b$ et $c$ sont donc 2, 10 et 60. Et leur somme vaut 72.

**Subsidiaire.** Réponse **174.**
En approchant $2^{10}$ par $10^3$ (1024 par 1000) et $9^2$ par $2^3\times 10$ (81 par 80), on peut évaluer le nombre de chiffres du produit $P=8^{88}\times 9^{99}$.
$P=2^{3\times 88}\times 9\times 9^{2\times 49}$. $P\approx 2^{264}\times 9\times 2^{3\times 49}\times 10^{49}\approx 9\times 2^{411}\times 10^{49}\approx 9\times 2\times 10^{3\times 41}\times 10^{49}\approx 18\times 10^{172}\approx 0{,}18\times 10^{174}$.
On a ainsi une évaluation par défaut de $P$ qui donne le bon nombre de chiffres. En fait, une approximation avec trois chiffres significatifs est $P\approx 0{,}875\times 10^{174}$, et le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $P$ est bien 174.