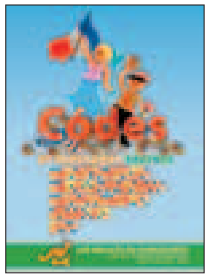
KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

LES TROPHÉES KANGOUROU 2014

KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1991 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

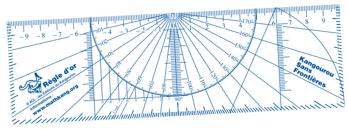
Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, trois cent quarante mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

Il a été étendu à toute l'Europe et ailleurs et réunit maintenant plus de 6 millions et demi de participants dans 64 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.math-ksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.



Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !
Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).

Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur quatre reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation au week-end parisien des *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).



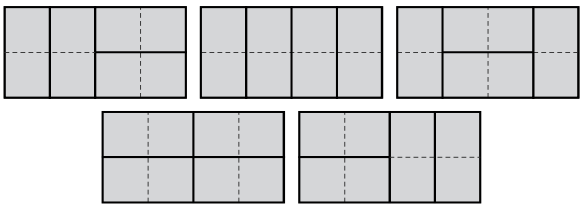
Le Kangourou : des services Internet sur www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou 2015 aura lieu le jeudi 19 mars 2015.

Trophées Kangourou 2014 - Corrigé de l'épreuve Benjamins (6e - 5e)

1. Réponse **A.** 50 mois = 4 ans + 2 mois. 2 mois et 50 semaines font plus qu'un an (52 semaines) et moins que deux, même avec les 50 jours en plus. Adam a donc 55 ans et il en aura 56 à son prochain anniversaire.

2. Réponse **A.** Dans le rectangle 4×2 …
… si le premier rectangle 2×1 est vertical, on retrouve alors les 3 possibilités de l'exemple pour terminer le dallage.
… si le premier rectangle 2×1 est horizontal, il en faut un autre horizontal en dessous ; et alors il y a 2 possibilités pour le carré 2×2 qui reste (2 rectangles horizontaux ou deux rectangles verticaux).
Cela fait 5 possibilités.



3. Réponse **B.** ●▼ peut valoir 17, 34, 51, 68 ou 85. ▼● vaut alors 71, 43, 15, 86 ou 58 ; or seul 15 est multiple de 3. Et donc ▼ + ● = 1 + 5, soit 6.

4. Réponse **B.** Le côté du grand triangle est découpé en 3 parties. Le côté opposé du parallélogramme construit sur la première partie a pour longueur, en cm, $5+2$. Et $(5+2)+5+(5+2)=19$. Le côté du grand triangle équilatéral est 19 cm.

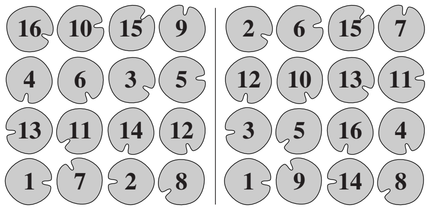
5. Réponse **B.** Le plus petit entier cherché est $2\times3\times2\times5\times7$, soit 420.

6. Réponse **E.** S'il n'y avait pas de poulet, les 16 pattes seraient les pattes de 4 singes, et il y aurait 4×20 soit 80 doigts. Alors, si on enlève un singe il faut rajouter 2 poulets pour avoir toujours 16 pattes et le nombre de doigts diminue de $20-(2\times 8)$ soit 4. C'est ce que l'on veut : 16 pattes et 76 doigts; il y a donc 3 singes et 2 poulets. Et comme il y a 19 têtes, il y a $19-3-2$ soit 14 serpents.

7. Réponse **D.** Les 39 000 habitants représentent $10\% + 5\%$, soit 15% de la population commune aux 2 villes en 2000. Ce qui veut dire que 5% de cette population de l'année 2000 vaut 13 000 habitants. Cette population était donc de $20 \times 13\,000$, soit 260 000 habitants.
Koalacity ayant diminué de 13 000 habitants depuis 2000, compte maintenant 247 000 habitants.

8. Réponse **B.** On peut choisir la couleur de la première face . Il y a alors 5 possibilités pour peindre la face opposée. Reste alors, avec les 4 couleurs restantes, à peindre la « bande » circulaire de 4 carrés séparant les deux faces opposées. Pour cela, on peut choisir la couleur du premier carré et il y a alors 6 façons de finir de colorier les 3 autres carrés de la bande (par exemple avec les couleurs Rouge, Vert et Bleu : RVB, RBV, VRB, VBR, BRV, BVR).
Le nombre de cubes différents est donc 5×6, soit 30.

9. Réponse **A.** La grenouille peut réussir à parcourir tous les nénuphars.
Pour le montrer, il suffit d'exhiber une solution (voir ci-contre 2 exemples).



On peut aussi remarquer ceci :
- Avec des sauts de 1 nénuphar, la grenouille peut parcourir les 4 sommets d'un carré de 9 nénuphars, et ce dans un sens ou dans l'autre.
- Les 16 nénuphars peuvent être répartis en 4 fois 4 carrés, comme le montre la figure :

A	B	A	B
C	D	C	D
A	B	A	B
C	D	C	D

- Et la grenouille peut parcourir successivement les 4 carrés comme ceci : elle parcourt le carré C dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et elle peut, en sautant 2 nénuphars, atteindre un sommet du carré D, qu'elle parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. De là, en sautant 2 nénuphars, elle peut atteindre un sommet du carré B qu'elle parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. De là, en sautant 2 nénuphars, elle peut atteindre un sommet du carré A, qu'elle parcourt dans le sens qu'elle veut (c'est le premier exemple donné).

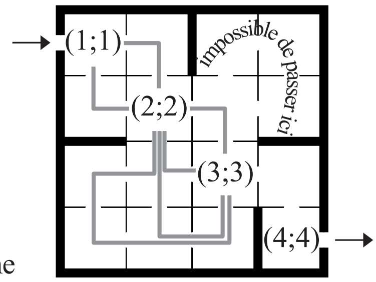
Subsidiaire. Réponse **31.**
S'il n'y a pas de retenue dans l'addition, la somme des chiffres des deux termes doit être égale à la somme des chiffres du résultat. Or la somme de tous les chiffres, $1+2+3+4+5+6+7+8+9$, vaut 45 qui est un nombre impair ; elle ne peut pas se diviser en deux sommes égales et il y a donc une retenue (et une seule, deux retenues sont impossibles pour la même raison de parité). Avec une retenue, la somme de deux chiffres en colonne vaut donc 10 de plus que le chiffre écrit au résultat et cette retenue fait ajouter 1 au chiffre plus à gauche. La somme des chiffres du résultat vaut donc celle des autres chiffres moins 10 plus 1. elle vaut donc 18 et celle des chiffres des deux nombres additionnés vaut 27 ($45 = 27 + 27 - 9$).
Les trios de chiffres dont la somme est 18 sont (9 ; 8 ; 1), (9 ; 7 ; 2), (9 ; 6 ; 3), (9 ; 5 ; 4), (8 ; 7 ; 3), (8 ; 6 ; 4), (7 ; 6 ; 5).
Il y en a donc 7, pour chacun desquels on peut former 6 nombres en permutant ces chiffres ; cela fait donc 42 nombres.
Mais ces 42 nombres ne sont pas forcément un résultat d'addition. Par exemple, le chiffre des centaines ne peut être ni 1, ni 2 (qui ne peuvent pas être la somme de deux des autres chiffres). On peut aussi s'apercevoir que certains résultats, comme 684 ou 756, ne peuvent pas être obtenus.
Une étude systématique montre qu'il y a finalement 31 résultats d'addition possibles. Les voici (chaque résultat pouvant évidemment être obtenu de plusieurs autres manières) :

$286+173=459$	$295+173=468$	$359+127=486$	$368+127=495$	$387+162=549$	$439+128=567$
$394+182=576$	$378+216=594$	$487+152=639$	$397+251=648$	$439+218=657$	$493+182=675$
$478+215=693$	$587+142=729$	$596+142=738$	$569+214=783$	$658+134=792$	$576+243=819$
$596+241=837$	$529+317=846$	$593+271=864$	$659+214=873$	$567+324=891$	$675+243=918$
$586+341=927$	$784+152=936$	$628+317=945$	$683+271=954$	$748+215=963$	$658+314=972$
$657+324=981$.					

Trophées Kangourou 2014 - Corrigé de l'épreuve Cadets (4^e - 3^e)

1. Réponse **B.** Deux déplacements successifs font reculer le robot de 1. Et $2014 \div 2 = 1007$. Donc après 2014 déplacements, le robot aura reculé de 1007 et se trouvera sur la graduation -1007.

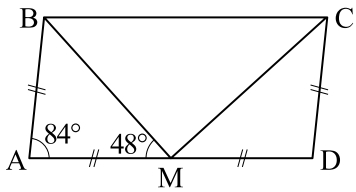
2. Réponse **B.** L'hypoténuse du triangle rectangle vaut 10 cm (théorème de Pythagore).
L'aire du triangle vaut d'une part $\dfrac{6\times 8}{2}$ soit 24, en cm^2 ; elle vaut aussi d'autre part, si h est la hauteur cherchée, $\dfrac{10\times h}{2}$.
D'où $h = 4{,}8$ cm.



3. Réponse **D.** En numérotant les cases par un couple d'entiers de 1 à 4 :
(2 ; 2) est un passage obligé, atteignable de 2 façons en partant de (1 ; 1).
(3 ; 3) est un passage obligé, atteignable de 4 façons à partir de (2 ; 2) : 2 directes, et 2 plus longues (voir dessin ci-contre).
De (3 ; 3), un seul chemin mène à (4 ; 4) et la sortie.
Ce qui fait 2×4, soit 8 trajets en tout pour traverser le labyrinthe.

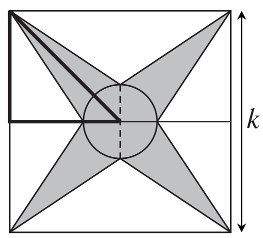
4. Réponse **C.** Pendant le dépassement, l'escargot doit gagner 30 mm sur la limace (la somme de leurs longueurs : $10 + 20 = 30$).
Or l'escargot gagne sur la limace 1,5 mm par seconde (différence de leurs vitesses : $2{,}5 - 1 = 1{,}5$).
La durée du dépassement est donc $\frac{30}{1{,}5}$, soit 20 s.

5. Réponse **B.** Dans la somme totale, chaque chiffre x, y ou z a été compté 2 fois en chiffre des centaines, 2 fois en chiffre des dizaines et 2 fois en chiffre des unités. Chaque chiffre a été ainsi compté 222 fois. La somme totale vaut donc $222(x+y+z)$.
Cette somme étant 1554, $x+y+z = \frac{1554}{222} = 7$.
Compte-tenu de la condition $0 < x < y < z$, on ne peut avoir que $x = 1$, $y = 2$ et $z = 4$.



6. Réponse **B.** Le troisième angle du triangle BAM, $\widehat{ABM}$, vaut $180° - 84° - 48°$, soit 48°.
Le triangle BAM est donc isocèle en A et AM = AB.
Puisque AM = MD (M est le milieu de [AD]) et que AB = CD (ABCD est un parallélogramme), on a MD = CD et le triangle MDC est isocèle en D.
L'angle $\widehat{MDC}$ de ce triangle vaut 96° (supplémentaire de l'angle en $\widehat{BAD}$ du parallélogramme ABCD : $180° - 84° = 96°$).
Les angles $\widehat{DMC}$ et $\widehat{MCD}$, égaux, valent donc chacun $\frac{180° - 96°}{2}$, soit 42°.

7. Réponse **A.** Les élèves qui ne possèdent pas de kangourou sont 30%. Les élèves qui ne possèdent pas de koala sont 25 %. Les élèves qui ne possèdent pas d'autruche sont 20 %. Les élèves qui ne possèdent pas de ragondin sont 15 %.
Si ces quatre ensembles d'élèves sont disjoints, 90% des élèves ont un seul animal qu'ils ne possèdent pas. En effet, $30 + 25 + 20 + 15 = 90$, et c'est le « pire » de ce qui peut arriver.
Ceux qui, au contraire, possèdent les quatre animaux sont donc au moins 10%.



8. Réponse **C.** Soit r le rayon du cercle et k le côté du grand carré. L'aire des 4 triangles qui complètent la partie grisée à l'intérieur du carré est $\frac{2}{3}k^2$. L'aire d'un de ces triangles vaut donc $\frac{k^2}{6}$ et sa hauteur (relative au côté de longueur k) vaut $\frac{k}{3}$. D'où l'égalité : $r + \frac{k}{3} = \frac{k}{2}$ et $r = \frac{k}{6}$.
Remarque : on peut faire le rapport des aires dans le triangle en traits épais : $\frac{1}{3} = \frac{r}{k/2}$.

9. Réponse **A.** Soient H1, H2 et H3 les trois nombres écrits horizontalement.
Et soient V1, V2 et V3 les trois nombres écrits verticalement.

	V1	V2	V3
H1	3	5	7
H2	8	1	9
H3	4	6	2

V2 est multiple de 4 (rappel : 100 est multiple de 4 et un multiple de 4 est tel que le nombre formé par ses deux derniers chiffres est multiple de 4), donc, avec le 1 déjà placé, V2 ne peut se terminer que par 12 ou 16. Mais comme 2 est déjà dans la grille c'est le 6 qui est sous le 1.
Comme V1 est pair, il ne peut se terminer que par un des chiffres pairs restants, soit 4 ou 8.
Alors H3 est soit 462 soit 862 ; c'est donc 462 qui est multiple de 3 (et bien multiple de 7 aussi).
Le nombre V1, avec les chiffres restants, ne peut se terminer que par 34, 54, 74, 84 et 94 ; il se termine donc par 84 qui est le seul multiple de 4 de la liste. Le nombre H2 qui est multiple de 21 ne peut alors être que 819 (84021).
Restent à placer 3, 5 et 7 qui ne peuvent l'être que d'une seule manière pour que V1, V2 et V3 soient multiples de 3. La grille est reproduite ci-contre. Il n'y a qu'une grille possible (et ce serait aussi le cas si le 1 et le 2 n'avaient pas été déjà placés).

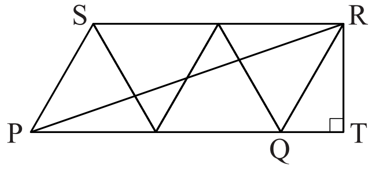
Subsidiaire. Réponse **1,25992104989…**
Le nombre cherché x est tel que $x^3 = 2$. Avec $12^3 = 1728$ et $13^3 = 2197$, on a $1{,}2 < x < 1{,}3$.
D'autres essais permettent de s'approcher, par exemple $126^3 = 2\,000\,376$.

Trophées Kangourou 2014 - Corrigé de l'épreuve Lycées

1. Réponse **D.** Il faut ajouter les angles du triangle (180°), du carré ($2 \times 180°$) et de l'hexagone ($6 \times 120° = 4 \times 180°$). Au total : $7 \times 180°$.

2. Réponse **C.** La médiane est 5. Il y a 5 nombres dans la liste donc deux inférieurs à 5 (qui ne peuvent être que 2 et 3) et deux supérieurs à 5. L'étendue étant 15, le plus grand nombre est 17. Pour que la moyenne soit 8, il faut que le quatrième nombre soit 13 ($2+3+5+13+17=5\times8$).

3. Réponse **C.** Soit T le projeté orthogonal de R sur la droite (PQ). La longueur cherchée PR est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les autres côtés, PT et TR, mesurent $\frac{5}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

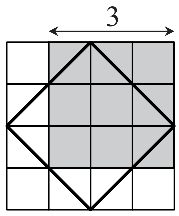


Ce qui donne, en appliquant le théorème de Pythagore, $PR=\sqrt{\frac{28}{4}}=\sqrt{7}$.

4. Réponse **D.** On a, avec L et ℓ en m, $L+\ell=20$ (demi-périmètre de la cour) et $L\times\ell=40$ (aire de la cour).
Le volume cherché, en m^3, est $\ell L^2+L\ell^2=\ell L(\ell+L)=20\times40=800$.

5. Réponse **C.** Un cube a 8 sommets. Choisir un triangle revient à choisir 3 sommets parmi les 8. Il y a $8\times7\times6$ façons de choisir une liste de 3 sommets, mais alors on a compté 6 fois chaque triangle (par exemple STU, SUT, TSU, TUS, UST et UTS sont tous le même triangle). Il y a donc 8×7, soit 56 triangles différents sur tout le cube. Pour trouver le nombre cherché, il faut soustraire les triangles appartenant aux faces. Sur chaque face du cube, on peut former 4 triangles différents (on laisse un des 4 sommets pour former un triangle avec les trois autres). On doit donc soustraire 4×6 à 56 et on trouve $56-24=32$.
Pour ceux qui connaissent les coefficients binomiaux, on a calculé : $\binom{8}{3}-6\times\binom{4}{3}=56-(6\times4)=32$.

6. Réponse **E.** La figure ci-contre montre que les longueurs i et j n'interviennent pas.
Il suffit de découper S en 9 petits carrés et de le border par d'autres petits carrés de même dimension : on voit que T vaut 8 de ces petits carrés (sur le dessin, 4 carrés au centre et 8 moitiés de carrés).



On peut aussi faire la démonstration suivante.
L'aire du carré S est $(k-j)^2$. Soit x le côté du carré T.
La diagonale du carré de côté k vaut $k\sqrt{2}$. Elle vaut aussi $j\sqrt{2}+x+\frac{x}{2}$.
On en déduit : $\frac{3}{2}x=(k-j)\sqrt{2}$ et $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}(k-j)$. L'aire de T est donc $\frac{8}{9}(k-j)^2$. Et donc $\frac{\text{aire de } S}{\text{aire de } T}=\frac{9}{8}$.

7. Réponse **E.** Soit $V_{I+II+III}$ le volume du grand cône initial, V_I le volume de sa réduction au tiers (cône I), et V_{I+II} le volume de sa réduction aux deux tiers (cône I+II). On a : $V_{I+II}=8\,V_I$ et $V_{I+II+III}=27\,V_I$.
Le tronc de cône II a donc pour volume $V_{II}=7\,V_I$ et le tronc de cône III a pour volume $V_{III}=19\,V_I$.
Alors $\frac{V}{W}=\frac{V_{II}-V_I}{V_{III}-V_{II}}=\frac{7-1}{19-7}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

8. Réponse **D.** Le nombre m vaut $10^{99}-1$.
Et $m^2=10^{198}+1-2\times10^{99}$.
Le mieux est de poser la soustraction :

$$\begin{array}{rl} 1000\ldots\ldots000\ldots\ldots001 & \text{(199 chiffres)}\\ -\quad 200\ldots\ldots000 & \text{(100 chiffres)}\\ \hline 999\ldots\ 9800\ldots\ldots001 & \end{array}$$

Si on regarde le résultat en partant de la droite, on a un 1 au chiffre des unités, puis 98 zéros, puis un 8, puis 98 chiffres 9.
La somme des chiffres de ce nombre vaut donc $1+8+(98\times9)=9+882=891$.

9. Réponse **E.** Si on observe la spirale, on voit que la diagonale descendant à droite à partir de la case du 1 contient tous les carrés impairs (ce qui s'explique assez bien !). On cherche donc un carré impair pas trop loin de 2014. On trouve $45^2=2025$. Le carré impair suivant est $47^2=2209$. Donc, sous la case de 2025, il y a 2208.
$2025-2014=11$, 2014 est sur la même ligne que 2025 mais 11 cases devant. Le nombre en-dessous de 2014 est 11 cases devant 2208, c'est 2197.

Subsidiaire. Réponse **$2{,}676506002\times10^{29}$.**
$2^{100}=\left(2^{10}\right)^{10}=(1000+24)^{10}=\left(10^3+24\right)^{10}=10^{30}+\ldots$
En commençant à développer $(a+b)^n$, on trouve $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)=a^n+n\,a^{n-1}\,b+\ldots$
Avec $a=10^3$, $b=24$ et $n=10$, on a $n\,a^{n-1}\,b=10\times10^{27}\times24=2{,}4\times10^{29}$ qui est une première approximation par défaut de la différence cherchée.
On peut savoir plus précisément que $(a+b)^n=a^n+n\,a^{n-1}\,b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\,b^2+\ldots\ldots+b^n$ et que, si a est beaucoup plus grand que b, les premiers termes sont les plus grands. Ainsi le terme correctif suivant est $45\times24\times24\times10^{24}$ soit $0{,}2592\times10^{29}$.
D'où une deuxième approximation par défaut : $2{,}6592\times10^{29}$. En pariant sur un probable prochain terme de l'ordre de $0{,}02\times10^{29}$, on s'approche encore…