KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

LES TROPHÉES KANGOUROU 2016

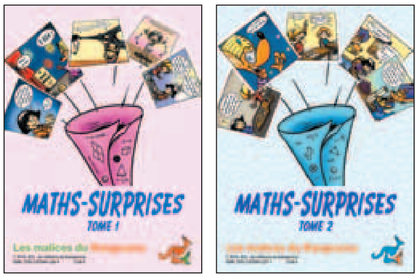
KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1990 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

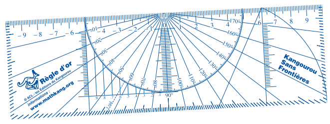
Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, trois cent trente mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

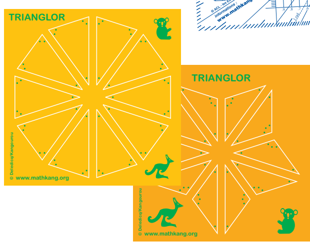
Il a été étendu à toute l'Europe et ailleurs et réunit maintenant plus de 6 millions de participants dans 70 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.aksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.

Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !
Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).

Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur quatre reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation aux *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).







Le Kangourou : des services Internet sur www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou 2017 aura lieu le jeudi 16 mars 2017.

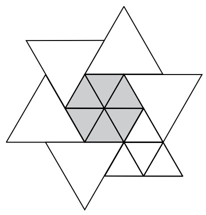
Trophées Kangourou 2016 - Corrigé de l'épreuve Benjamins (6^e - 5^e)

1. Réponse **C.** On peut compléter en commençant par la colonne de droite, B1, puis A2, puis C3, ensuite la colonne centrale, C2 en haut, A1 en bas et donc B3 au centre. La grille complète est donnée ci-contre.

A3	C2	B1
C1	B3	A2
B2	A1	C3

2. Réponse **D.** La seule autre suite possible est 5, 6, 7, 8 avec 56÷7 = 8.

3. Réponse **C.** L'hexagone se décompose en 6 triangles équilatéraux (voir figure). En prenant, comme unité d'aire, l'aire d'un de ces six triangles équilatéraux, on a :
aire grise = 6 ;
aire d'un grand triangle blanc = 1 + 3 = 4 ;
aire totale de la figure = 6 + 6 × 4 = 30. Le rapport demandé vaut donc $\frac{6}{30}$ soit $\frac{1}{5}$.



4. Réponse **E.** La moyenne des âges des 9 membres de la famille étant 18 ans, la somme des 9 âges est 9 × 18 soit 162 ans.
La moyenne des âges des 7 enfants étant 12 ans, la somme de ces 7 âges est 7 × 12 soit 84 ans.
La somme des âges de la mère et du père est donc 162 – 84, soit 78 ans. Et comme la mère a 2 ans de plus que le père, elle a 40 ans et le père a 38 ans.

5. Réponse **C.** En considérant le cube comme composé de 27 petits cubes unité, les percements ont enlevé 7 petits cubes (un par face et le petit cube central). Le rapport demandé est donc $\frac{20}{27} = 0{,}7407\ldots$ soit environ 74%.

6. Réponse **A.** On a $n > 13$ (car le reste est inférieur au diviseur). Soit q le quotient dans la division euclidienne de 269 par n. $269 = nq + 13$ donc $nq = 256$. Or 256 n'a que 5 diviseurs plus grand que 13, ce sont : 256, 128, 64, 32 et 16.
Donc les divisions $269 \div 256$; $269 \div 128$; $269 \div 64$; $269 \div 32$ et $269 \div 16$ ont pour reste 13 et ce sont les seules dans ce cas avec 269 comme dividende.

7. Réponse **D.** On a $\blacksquare \times \blacktriangle = \blacktriangle$ donc, soit $\blacktriangle = 0$, soit $\blacksquare = 1$.
Si $\blacktriangle = 0$, alors $\bullet + \blacksquare + \bullet = \blacksquare 0$. Mais la somme de 3 chiffres est strictement inférieure à 30. $\blacksquare = 1$ ne convient pas ($\bullet$ devrait valoir 4,5). Seul $\blacksquare = 2$ convient avec $9 + 2 + 9 = 20$.
Si $\blacksquare = 1$, alors $1\blacktriangle = \bullet + 1 + \bullet$ et $\blacktriangle$ est impair. Les trois symboles étant des chiffres différents, on obtient 3 possibilités : $13 = 6 + 1 + 6$, $15 = 7 + 1 + 7$, $17 = 8 + 1 + 8$.
Il y a donc, en tout, quatre possibilités pour le chiffre $\bullet$: 6, 7, 8 et 9.

8. Réponse **B.** En posant la multiplication, on comprend qu'à cause des décalages, le grand produit cherché se terminera par 776 (6 ; 1+6 ; 0+1+6), contiendra ensuite des 9 (2+0+1+6) et commencera par 223 (2 ; 2+0 ; 2+0+1). Il contient donc 6 chiffres qui ne sont pas des 9.
D'autre part, en multipliant 111…111 (qui comporte 2016 chiffres) par 1000 ou 2000 ou 3000… ou 2016, le résultat comportera 2019 chiffres. Parmi ceux-ci 2013 seront des 9.

```
                 2016
×   1111 … … 11111
-------------------
                 2016
               2016 .
             2016 . .
           2016 . . .
         2016 . . . .
   . . . . . . . . .
      2016
    2016
  2016
2016
-------------------
2239999…99999776
```

9. Réponse **E.** La somme de tous les nombres de la pyramide est $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$.
Appelons A la somme sur chacune des arêtes de la pyramide et S la somme des quatre nombres situés aux sommets. En additionnant les sommes sur les 6 arêtes, on aurait l'égalité $6A = 55 + 2S$ (on compte une fois chaque nombre au milieu d'une arête et 3 fois chaque sommet, chacun appartenant à 3 arêtes).
On aurait donc $55 = 2 \times (3A - S)$ ce qui est impossible car le nombre impair 55 n'est pas multiple de 2.

Subsidiaire. Réponse **246** (voir fin du document).

Trophées Kangourou 2016 - Corrigé de l'épreuve Cadets (4^e - 3^e)

1. Réponse **C.** Si le reste dans la division de n par 6 est 3, c'est qu'il existe un entier q tel que $n = 6q + 3$.
Donc $3n = 18q + 9 = 6(3q + 1) + 3$, égalité qui montre que le reste dans la division euclidienne de $3n$ par 6 est 3.

2. Réponse **B.** On fait la somme des 3 angles du triangle du haut de la figure : $x + (180° - x - y) + (180° - x - z) = 180°$.
D'où : $180° - x - y - z = 0$ et $x = 180° - y - z = 180° - 70° - 80° = 30°$.

3. Réponse **C.** Il y a 2 façons d'écrire 16 comme produit de 2 entiers différents : $16 = 1 \times 16 = 2 \times 8$.
Il y a 4 façons d'écrire 225 comme produit de 2 entiers différents : $225 = 1 \times 225 = 3 \times 75 = 5 \times 45 = 9 \times 25$.
La seule possibilité pour les quatre entiers est donc 2 et 8 (pour les deux plus petits) et 9 et 25 (pour les deux plus grands). Et, comme il n'y a pas d'entiers entre 8 et 9, c'est qu'il n'y a que quatre entiers écrits au tableau. Leur somme vaut $2 + 8 + 9 + 25$, soit 44.

4. Réponse **C.** Prenons comme unité le rayon du cercle. Alors, l'aire du grand carré de côté 2 est 4. La diagonale du petit carré est 2, son côté est $\sqrt{2}$ et son aire est 2. Et l'aire du disque est π.
On a donc $4T = 4 - \pi$ et $4S = \pi - 2$. D'où $\dfrac{T}{S} = \dfrac{4-\pi}{\pi - 2}$.

5. Réponse **E.** Appelons r le nombre de dragons rouges et b le nombre de dragons bleus.
Le nombre total de queues est $3r + 3b$. Le nombre total de jambes est $2r + 6b$. D'après l'énoncé, on a $2r + 6b = 12 + 3r + 3b$ et donc $3b = 12 + r$. D'autre part, $6b = 5 \times 2r$ et donc $3b = 5r$. D'où $5r = 12 + r$ et $r = 3$. $b = 5$. Et il y a donc 8 dragons au zoo.

6. Réponse **D.** Le côté du carré est aussi hauteur des 4 triangles qui composent la zone grisée (triangles de bases p, q, r et s, les triangles de bases q et r ayant un côté commun).
L'aire totale des parties grisées est donc $\dfrac{pa}{2} + \dfrac{qa}{2} + \dfrac{ra}{2} + \dfrac{sa}{2}$. Or cette aire vaut 27 et a, côté d'un carré d'aire 36, vaut 6.
On a donc $p + q + r + s = \dfrac{2 \times 27}{a} = \dfrac{54}{6} = 9$.

7. Réponse **B.** Soient n le nombre de campeurs, s le nombre de boîtes de soupe, c de cassoulet et p de compote de pommes.
On a $n = 2s = 3c = 4p$ et $s + c + p = 156$. D'où $\dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{3} + \dfrac{n}{4} = 156$; $\dfrac{13}{12}n = 156 = 13 \times 12$ et $n = 12 \times 12 = 144$.

8. Réponse **D.** Les nombres sont des nombres à 4 chiffres et il y en a $4 \times 3 \times 2 \times 1$, soit 24. Parmi eux, chaque chiffre est écrit 6 fois en chiffre des milliers, 6 fois en centaines, 6 fois en dizaines et 6 fois en unités. Et comme $2 + 4 + 6 + 8 = 20$, leur somme vaut $(6 \times 20 \times 1000) + (6 \times 20 \times 100) + (6 \times 20 \times 10) + (6 \times 20)$ soit 133320.

9. Réponse **C.** Le wagon 3 n'étant pas vide, les passagers du wagon 2 ont plus de voisins que ceux du wagon 1 ; ils en ont donc 10 et ceux du premier wagon en ont 5.
Soit P_i le nombre de passagers du i-ème wagon.
Le nombre de voisins d'un passager du 1er wagon est $5 = P_1 - 1 + P_2$.
Le nombre de voisins d'un passager du 2^{e} wagon est $10 = P_1 + P_2 - 1 + P_3$. Donc $P_3 = 5$.
On a $P_1 + P_2 = 6$ et, de même, $P_4 + P_5 = 6$. Les passagers sont donc, au total, $6 + 5 + 6$ soit 17.
Remarque : on peut choisir P_1 égal à 1, 2, 3, 4 ou 5 ; et alors $P_2 = 6 - P_1$; $P_3 = 5$; $P_4 = P_1$ et $P_5 = P_2$; ce qui donne 5 solutions : (1 5 5 1 5), (2 4 5 2 4), (3 3 5 3 3), (4 2 5 4 2) et (5 1 5 5 1).

Subsidiaire. Réponse **375** (voir fin du document).

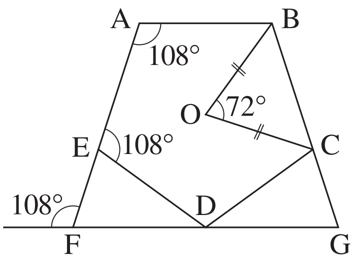
Trophées Kangourou 2016 - Corrigé de l'épreuve Lycées

1. Réponse **E.** Pour chaque entier n, la moyenne de n et n^2 vaut $\dfrac{n^2+n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Les moyennes pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$ sont 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, … (ce sont les nombres dits « triangulaires »). Le nombre 30 n'est pas dans cette liste.

2. Réponse **C.** Pour les deux dés jetés, parmi les 36 possibilités équiprobables, 6 donnent un même résultat sur les deux dés, $\dfrac{36-6}{2}$ (soit 15) donne le résultat du dé de Matt plus grand que celui d'Alice, et $\dfrac{36-6}{2}$ donne le résultat contraire.
La probabilité que le résultat du dé de Matt soit au moins aussi grand que celui d'Alice est donc $\dfrac{6+15}{36} = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$.

3. Réponse **D.** On a $d = a + 9 = b^2 + 3 = c^2 + 7$. Donc d est plus grand que a, que b^2, que c^2 et que 7. Si b (ou c) est négatif, d positif, est plus grand. Si b (ou c) est compris entre 0 et 1, b^2 (ou c^2) aussi, et d est plus grand puisque supérieur à 7. Si b (ou c) est supérieur à 1, d, supérieur à b^2 (ou c^2), est plus grand que b (ou c). d est donc plus grand que les trois autres.

4. Réponse **D.** Si le pentagone ABCDE est régulier, chacun de ses angles vaut 108° :
avec O centre du pentagone,
on a $\widehat{ABC} = 2\,\widehat{OBC} = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180° - \widehat{BOC} = 180° - \dfrac{360°}{5} = 108°$.
Alors : $\widehat{DEF} = 180° - 108° = 72°$. Et, en considérant l'alterne-interne égal à $\widehat{EAB}$
et marqué en F sur la figure : $\widehat{EFD} = 180° - 108° = 72°$.
Le triangle DEF est donc isocèle et DE = DF. De même DC= DG. Et donc $DF = DG = \dfrac{FG}{2}$.
Le côté du pentagone, égal à DG ou DF, mesure la moitié de FG soit 5 cm.



5. Réponse **C.** La somme des chiffres d'un entier à deux chiffres peut valoir…
… au plus $9 + 9$ soit 18 mais $99 = 5 \times 18 + 9$ (reste 9) ;
… ou $9 + 8$ soit 17 mais $98 = 5 \times 17 + 13$ et $89 = 5 \times 17 + 4$;
… ou $9 + 7$ soit 16 mais $97 = 6 \times 16 + 1$ et $88 = 5 \times 16 + 8$ et $79 = 4 \times 16 + 15$.
Le plus grand reste pouvant être obtenu est donc 15 en divisant 79 par 16.

6. Réponse **E.** On doit savoir que tout nombre se décompose, de manière unique, en somme de puissances de 2 (c'est le principe de la numération en base deux).
La somme des 8 cartes vaut 255. La somme de Félix valant 31 de plus que celle de Léo, elle vaut 143 (et celle de Léo vaut 112). Or $143 = 128 + 8 + 4 + 2 + 1$; on connaît donc les 6 cartes prises par Félix et il n'y a pas le 16.

7. Réponse **A.** Appelons g le nombre de kangourous gris et r le nombre de rouges.
À chaque kangourou gris est associée la fraction $\dfrac{r}{g}$ et à chaque kangourou rouge la fraction $\dfrac{g}{r}$.
La somme de toutes les fractions vaut donc $g \times \dfrac{r}{g} + r \times \dfrac{g}{r}$ soit $r + g$, qui est égal 2016.

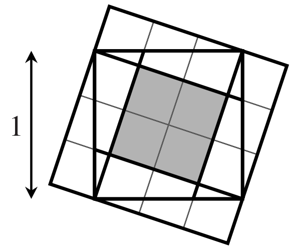
8. Réponse **A.** Dans un triangle dont les côtés mesurent a, b, c, on vérifie les « inégalités triangulaires » : chaque côté à une longueur comprise entre la somme et la différence des deux autres.
Appelons A, B et C les longueurs des hauteurs associées à chaque côté a, b, c.
Le double de l'aire S du triangle vaut $2S = aA = bB = cC$, de sorte que les inégalités triangulaires doivent être vérifiées par les inverses des hauteurs.

Si $A=10$ et $B=11$, on doit avoir $\frac{1}{10}-\frac{1}{11}<\frac{1}{C}<\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$, c'est-à-dire $\frac{1}{110}<\frac{1}{C}<\frac{21}{110}$ ou $\frac{110}{21}<C<110$.

$5<\frac{110}{21}<6$. La plus petite valeur possible pour troisième hauteur est 6 (en cm).

9. Réponse **B.** Construisons le grand carré dont les côtés sont parallèles au carré grisé et passant par les sommets du carré initial. Ce grand carré est naturellement partagé en 16 petits carrés ; le carré grisé vaut 4 de ces petits carrés et le carré initial en vaut $(4\times4)-2\times(1\times3)$ soit 10.

L'aire du carré initial étant 1, l'aire du carré grisé est $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$.



Subsidiaire. Réponse **550.**

Corrigé des questions subsidiaires.

On trace tous les segments joignant, deux à deux, les sommets d'un polygone convexe à n côtés.
Combien ces segments déterminent-ils de régions finies lorsque toutes les intersections de diagonales sont distinctes ?

• Précisément, le nombre N de régions cherchées est :

$$N=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}-n+1=\frac{n(n-1)(n^2-5n+18)}{24}-n+1.$$

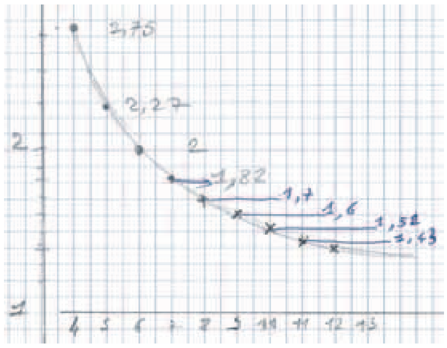
Pour $n=10$, on trouve $\frac{10\times9\times68}{24}-9=246$. Pour $n=11$, on trouve $\frac{11\times10\times84}{24}-10=375$. Pour $n=12$, on trouve $\frac{12\times11\times102}{24}-11=550$.

• Une évaluation rapide, à l'épreuve des trophées.

En faisant des essais pour n petit, on se persuade du caractère plutôt multiplicatif de la progression du nombre de régions. On peut compter à la main : 4 régions pour $n=4$. Puis 11 pour $n=5$ et $11=2{,}75\times4$. Puis 25 pour $n=6$ et $25=2{,}27\times11$. Puis 50 pour $n=7$ et $50=2\times25$. Puis 91 pour $n=8$ et $91=1{,}82\times50$.

Chaque fois qu'on augmente n de 1 (à partir de 4), le nombre de régions est multiplié successivement par 2,75, par 2,27, par 2, par 1,82…

En extrapolant, grossièrement, à partir d'un graphique à main levée (comme ci-contre), on peut évaluer les multiplicateurs suivants à 1,7 1,6 un peu plus de 1,5 et environ 1,45.



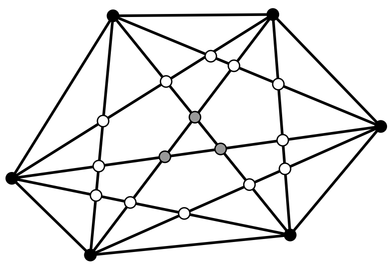
Cela donne, en arrondissant les nombres pour calculer vite :

$90\times1{,}7\approx153$ pour $n=9$, $153\times1{,}6\approx245$ pour $n=10$, $245\times1{,}5\approx370$ pour $n=11$, $370\times1{,}45\approx540$ pour $n=12$.

On peut donc tenter 245 régions pour $n=10$, 370 pour $n=11$ et 540 pour $n=12$.

• Démonstration.

Il faut ici connaître la relation d'Euler : $S+F=A+1$, dans un « graphe » comprenant S sommets, A segments (ou arêtes) joignant ces sommets et F régions (ou faces). La figure montre un polygone à 6 côtés ($n=6$) et on a $S=21$, $F=25$ et $A=45$.



$S=n+i$, i étant le nombre de points d'intersection des segments intérieurs au polygone, par ailleurs égal nombre de choix possibles de 4 sommets parmi n, noté ici $C_{n,4}$.

Les arêtes sont ici de trois sortes.

•1• Les côtés du polygone, il y en a $A1=n$.

•2• Les segments joignant un sommet du polygone à un point d'intersection intérieur adjacent (point dont l'intérieur est blanc sur la figure). Le nombre de segments joignant deux sommets du polygone étant ici noté $C_{n,2}$, le nombre $A2$ de segments joignant un sommet du polygone à un point d'intersection intérieur adjacent est $2(C_{n,2}-n)$.

•3• Les segments joignant deux points intérieurs au polygone. Puisque 4 segments aboutissent à ces points, $4i$ vaut donc deux fois le nombre de segments joignant deux points intérieurs ($A3$) plus une fois le nombre de segments joignant un point intérieur adjacent à un sommet du polygone ($A2$). Le nombre de segments aboutissant à un point intérieur au polygone ($A2+A3$) vaut donc $2i$ plus la moitié de $A2$, soit $2i+(C_{n,2}-n)$.

D'où $A=A1+A2+A3=n+(2i+(C_{n,2}-n))=2i+C_{n,2}$ et $F=2i+C_{n,2}+1-(n+i)+1=i+C_{n,2}-n+1$

Comme $i=C_{n,4}$, $F=C_{n,2}+C_{n,4}-n+1$. D'où le résultat annoncé plus haut.

Par exemple, pour $n=6$ (figure), $F=\frac{6\times5}{2}+\frac{6\times5\times4\times3}{24}-5=25$.