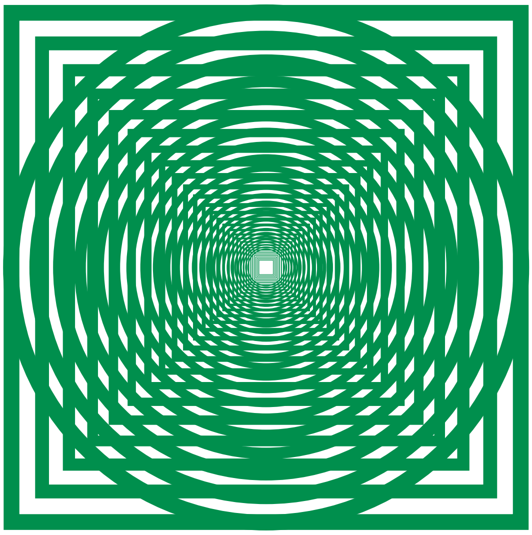
Mirifiques & miribolants moirés

En cherchant le mot "MOIRÉ" dans un dictionnaire, on trouve : *l'aspect d'un tissu sur lequel, comme la soie, des ombres très mobiles se dessinent sur la trame.*



Le paysage, ineffablement assoupi, avait cette moire magnifique que font sur les prairies et sur les rivières les déplacements de l'ombre et de la clarté…
V. HUGO,
Quatre-vingt-treize

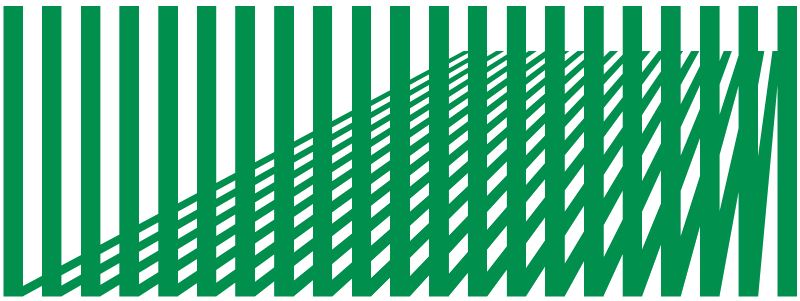
Devant nous, la Méditerranée n'avait pas un frisson sur toute sa surface qu'une grande lune calme moirait.
G. de Maupassant,
Contes de la bécasse

Et, en effet, en regardant les plis ou l'ourlet d'un rideau de nylon, on voit des familles de courbes qui évoluent en suivant les mouvements du rideau.

Une haie formée de poteaux, éclairés par le soleil, a une ombre elle aussi formée de segments de lignes parallèles entre elles. Une nouvelle famille de lignes courbes apparaît lorsque la haie se superpose à son ombre (voir sur la figure ci-contre, les lignes courbes qui apparaissent).

On peut voir des dessins de moiré sur des corbeilles à papier grillagées en les regardant dans un certain sens, ou en observant une forêt à travers les cordes d'un hamac, ou un zèbre à travers les grilles d'un zoo…

Des dessins de *moiré* sont aussi susceptibles d'apparaître chaque fois qu'on superpose une structure répétitive sur une autre structure répétitive.



À cause de la définition des images ligne à ligne, toutes sortes de moirés peuvent être observés à la télévision ; mais on essaie de les éviter. C'est pourquoi, les présentateurs sont instamment priés de ne pas porter des vêtements finement rayés. Le moindre mouvement se transformerait en un gigantesque moiré formé par les rayures et les lignes de l'écran.

Définition du moiré

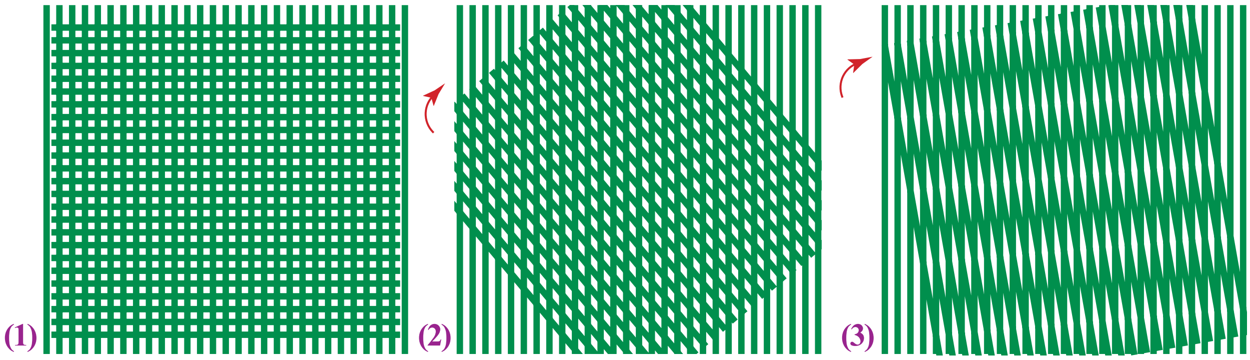
Que peut-il se passer lorsque deux familles de courbes sont introduites dans le même espace ?
Il y a deux solutions.

1. Soit chacune d'entre elles garde sa personnalité. L'observateur ne peut apercevoir autre chose que deux familles pouvant avoir quelques points communs mais chacune est facilement reconnaissable.

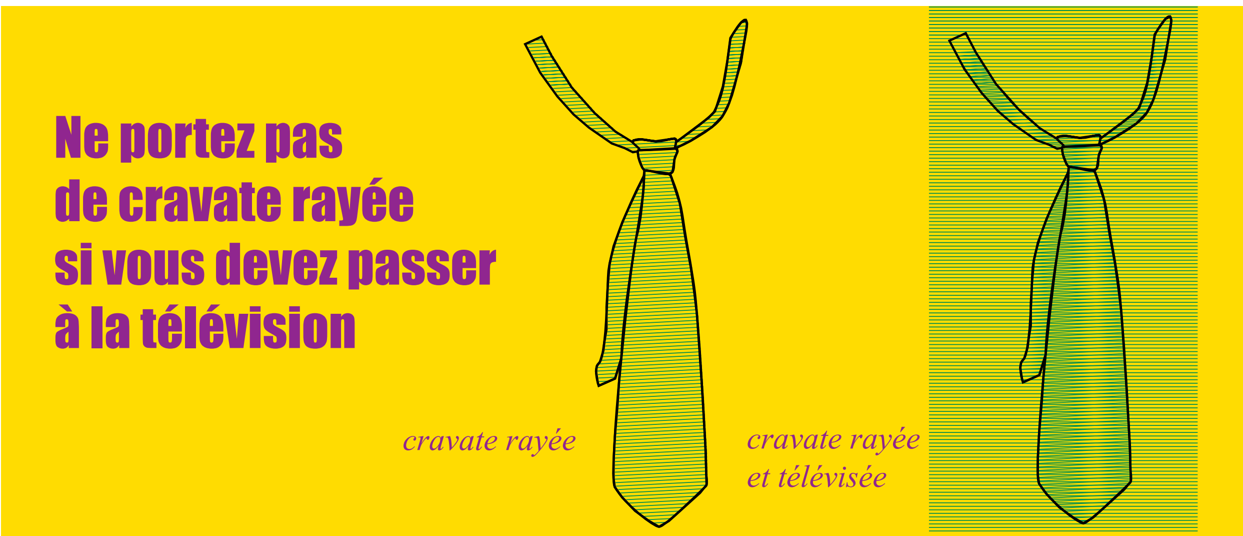
2. Soit des liaisons se nouent entre les éléments de chaque famille. Ces relations transversales prennent finalement le pas sur les parentés originelles.

Ainsi apparaît alors une nouvelle famille née de l'intime combinaison des deux familles précédentes.

On peut dire alors qu'il y a un **phénomène de moiré** : **la superposition de deux familles de courbes en fait apparaître visuellement une troisième**.



Sur la figure ci-dessus, on voit deux familles de droites perpendiculaires (1). En faisant tourner une famille de droites, on voit d'abord l'autre famille clairement et séparément (2). Mais lorsque leurs directions deviennent voisines (ici presque verticales), des lignes transversales apparaissent (3) : on "voit" des lignes horizontales (qui sont formées par l'intersection des droites des deux familles), alternativement blanches et noires.



Mathématisation du phénomène

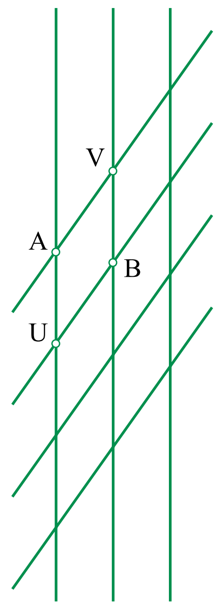
Tentons une modélisation du phénomène précédent.

Partant d'un simple quadrillage, faisons s'incliner la famille d'abord horizontale.

Lorsque cette deuxième famille se verticalise, le quadrillage devient assez "oblique". De sorte que les points A et B deviennent plus proches que les points U et A ou A et V. Et une nouvelle ligne transversale reliant A et B apparaît.

Et l'œil reliera d'autant plus volontiers le point A au point B que les lignes des familles initiales ont une certaine épaisseur.

C'est exactement ce qui s'est passé dans le premier exemple donné.



Finalement, pour qu'un effet de moiré apparaisse nettement, l'expérience visuelle montre que les conditions suivantes doivent être satisfaites :

— les épaisseurs des lignes blanches et noires de chaque famille doivent être du même ordre.

— les épaisseurs des lignes des deux familles doivent être du même ordre.

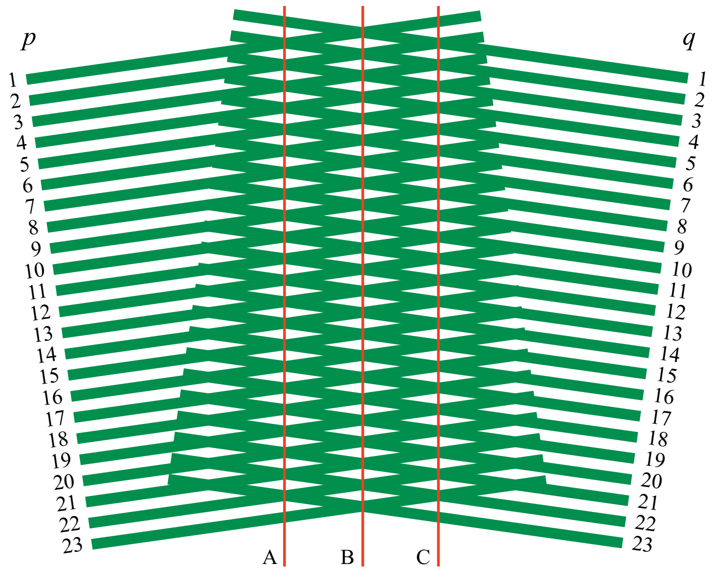
— les angles entre les lignes des deux familles ne doivent pas être trop grands (si ces lignes ne sont pas des droites, il s'agit des angles formés par les tangentes aux points d'intersection).

Premier exemple de mise en équation

Choisissons un paramétrage des droites des deux familles quai équivale à un numérotage, de façon que deux droites consécutives aient des numéros consécutifs (figure ci-contre). Nous constatons que la "droite blanche" notée A passe par les points d'intersection des droites de numéros respectifs p et q tels que : $q - p = 1$.

La droite notée B passe par les points d'intersection des droites de numéros p et q tels que $q - p = 0$.

En fait, entre chaque ligne "blanche" apparaît une ligne "noire", le tout formant finalement une nouvelle **famille de lignes**, dite **de moiré**.



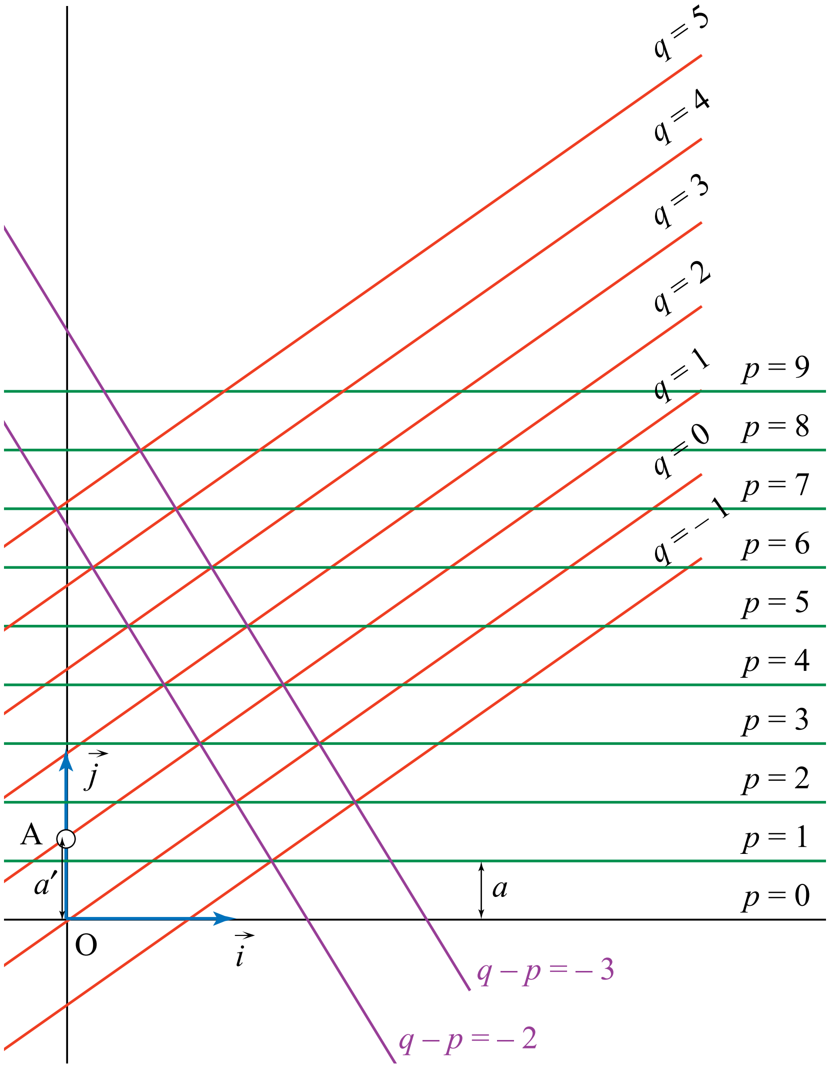
Nous voyons donc que pour étudier les "lignes blanches" de moiré, on est amené à étudier les points d'intersection des courbes de numéros respectifs p et q tels que $q - p = n$, où n est un entier donné.

Pratiquement, nous ne chercherons pas à déterminer les lignes noires, puisque celle-ci sont de même nature que les blanches. Dans la suite, nous ne préciserons donc plus la couleur de ces lignes.

Voyons maintenant comment on peut déterminer des équations des lignes de moiré. Pour cela, il faut évidemment avoir des équations des courbes initiales dans un repère convenablement choisi.

Pour notre exemple, prenons un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'axe $(\mathrm{O}, \vec{i})$ soit parallèle à l'une des familles de droites.

Les droites de cette famille ont pour équation : $y = pa$ où p est le numéro de la droite et a la distance entre deux droites consécutives.



Appelons m le coefficient directeur commun à toutes les droites de la seconde famille (on suppose évidemment que ces droites ne sont pas parallèles à $(\mathrm{O}, \vec{j})$) ; ces droites ont donc pour équation :

$$y = mx + qa'$$

où q est le numéro de la droite considérée et a' la distance OA (voir la figure).

Soit (x, y) les coordonnées d'un point appartenant à l'intersection de deux droites d'indices respectifs p et q tels que $q - p = n$.

On a donc les égalités suivantes :

$$y = pa$$
$$y = mx + qa'$$
$$q - p = n.$$

Nous en déduisons :

$$p = \frac{y}{a}$$

et

$$q = n + p$$

donc

$$y = mx + \left(n + \frac{y}{a}\right)a'.$$

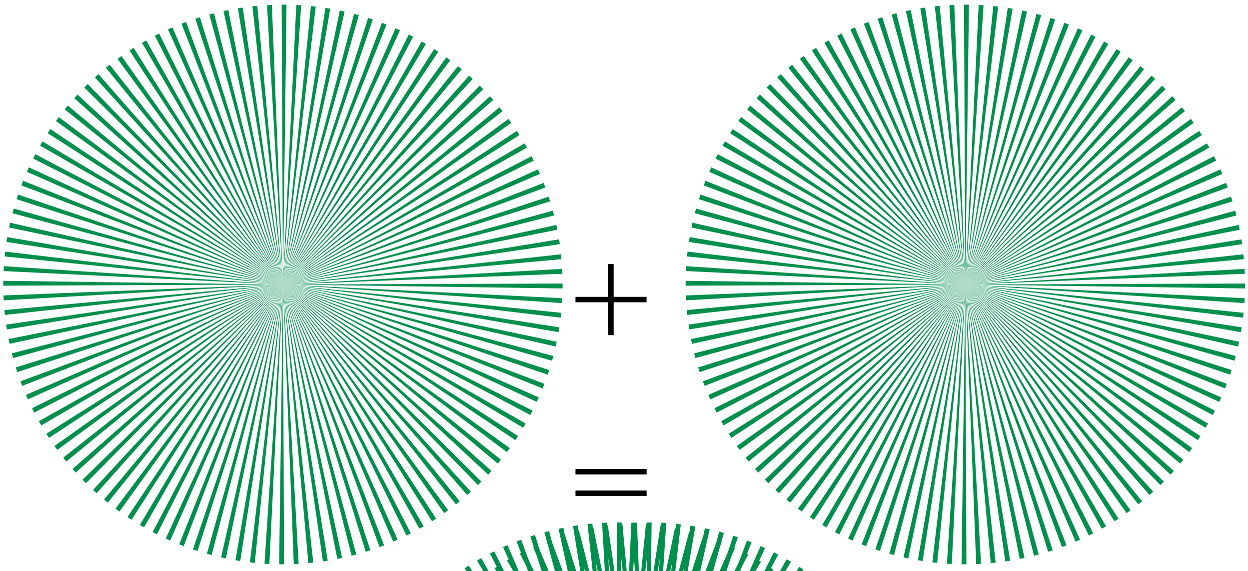
Soit

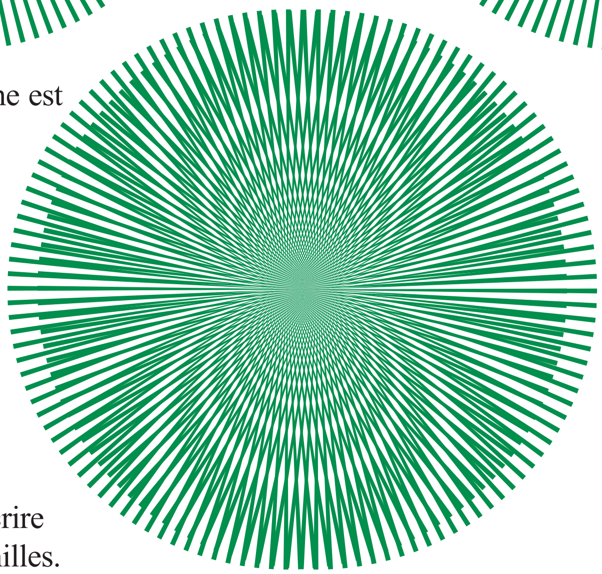
$$\left(1 - \frac{a'}{a}\right)y = mx + na' \quad (*).$$

Cela signifie que les coordonnées des points d'intersection des droites d'indices p et q tels que $q - p = n$ vérifient la relation (*) qui est une équation de droite. Lorsque n varie, ces droites forment une famille de droites parallèles (de pente fixée par m, a et a').

Finalement, la droite ayant (*) pour équation, est une “ligne de moiré” associée au nombre n. Et ces lignes de moiré forment ici une famille de droites parallèles.

Regarder des droites et voir des cercles





Attention ce phénomène est absolument extraordinaire !

Mais quelques manipulations algébriques suffisent à l'expliquer.

Prenez deux faisceaux de droites concourantes et juxtaposer-les : on voit une famille (un “faisceau”) de cercles !

Pour expliquer ce phénomène, il nous faut écrire les équations des deux familles.

Chaque famille est composée de droites faisant un angle α avec l'horizontale, α variant régulièrement ; elles sont du type

$y = (x - a) \tan \alpha$,

lorsque leur point de concours commun ($x = a$, $y = 0$) est situé sur l'axe Ox. Décidons que les deux familles sont disposées symétriquement par rapport à l'origine.

Leurs équations sont alors :

$y = (x + a) \tan \alpha$

$y = (x - a) \tan \beta$.

Le moiré apparaît si a est petit !

Pour trouver l'équation des courbes du moiré, il faut éliminer les paramètres (α et β) en écrivant

$\alpha - \beta = \lambda$, c'est-à-dire

$\tan (\alpha - \beta) = \tan \lambda = k$.

Or

$$\tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

d'où :

$$k = \frac{y/(x + a) - y/(x - a)}{1 + y^2/(x^2 - a^2)}$$

$$k = \frac{y(x - a) - y(x + a)}{x^2 - a^2 + y^2}.$$

L'équation de la famille de moirés, de paramètre k, est donc :

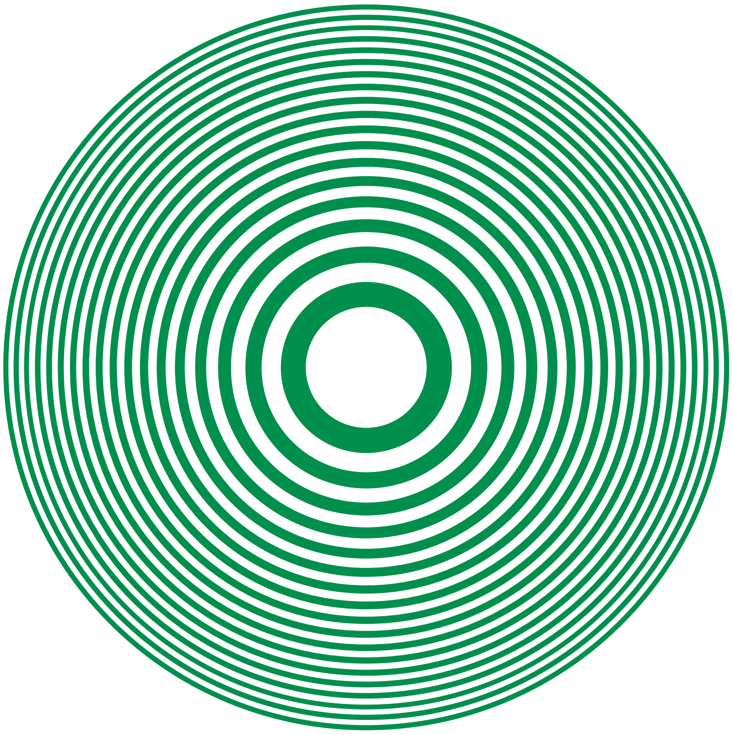
$k(x^2 + y^2) + 2ya - ka^2 = 0.$

C'est bien celle d'une famille de cercles centrés sur l'axe Oy (ordonnée du centre : $-\dfrac{a}{k}$) et passant très près de l'origine (car a^2 est très très petit).

Regarder des cercles et voir des droites

Parmi les familles de cercles concentriques, il en est une plus étonnante que les autres ; c'est celle des **cercles de Fresnel** (en mémoire d'un physicien mathématicien qui a particulièrement étudié les phénomènes d'interférences lumineuses ; Augustin Fresnel, 1788-1827).

Il s'agit de la famille de cercles dont les rayons sont successivement 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, 3, …, $\sqrt{n}$, …

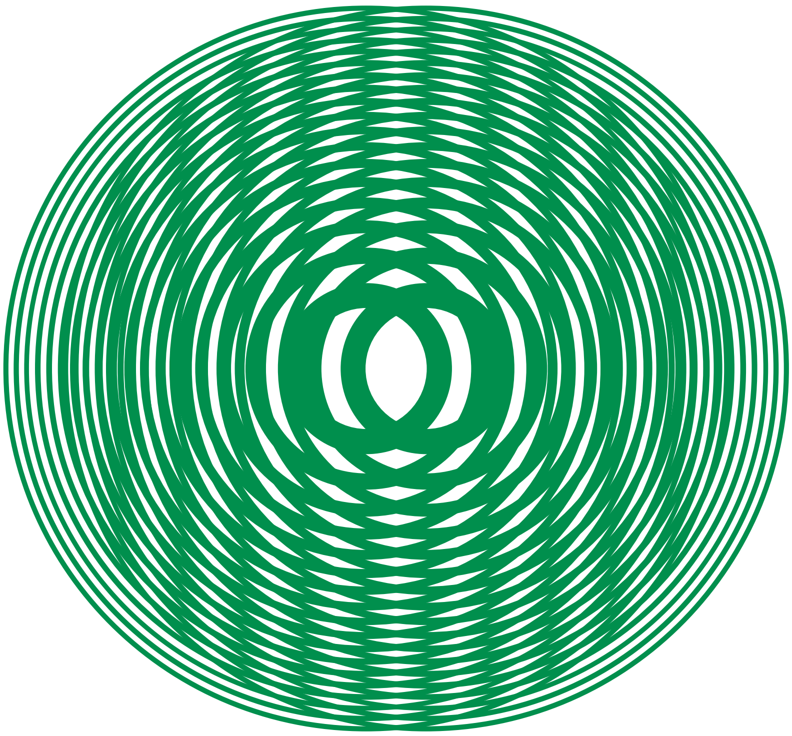


Les cercles de rayons successifs $\sqrt{n}$ déterminent des couronnes d'aire $\pi\sqrt{n+1}^{\,2} - \pi\sqrt{n}^{\,2}$, soit $\pi(n+1) - \pi n = \pi$.

Les couronnes successives déterminées par ces cercles ont donc des aires égales.

En coloriant alternativement en noir et blanc ces couronnes et en superposant deux tels dessins, on peut obtenir un fantastique moiré.

On voit des verticales !!!



Et voici l'explication algébrique.

Les équations des deux familles de cercles sont :

$(x+a)^2 + y^2 = \alpha\pi$

$(x-a)^2 + y^2 = \beta\pi$.

En posant $\alpha - \beta = k$, α et β s'éliminent sans difficulté, et on obtient $2ax = k\pi$.

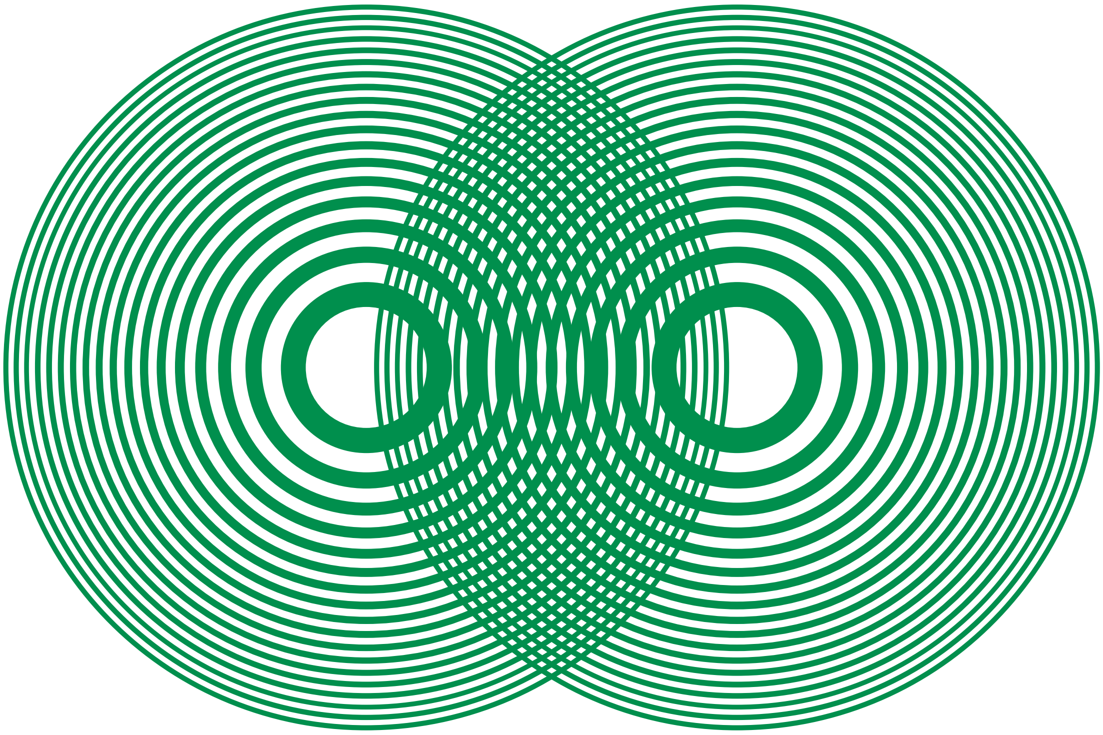
C'est bien une famille de verticales d'équations

$$x = \frac{k\pi}{2a}.$$

Fresnel + Fresnel = Fresnel + Fresnel + Fresnel

Mais voilà qu'il se passe ici une fantasmagorie supplémentaire.

Si on élargit les centres des deux familles alors, après une période de confusion, ce ne sont plus des droites que l'on voit, mais **un faisceau de cercles de Fresnel qui ressemble aux**



On a beau être sidéré, on n'en cherche pas moins l'explication algébrique… et on la trouve : les moirés obtenus sont ceux qui correspondent à la deuxième relation possible entre les paramètres α et β :

$\alpha + \beta = \mathrm{K}.$

On obtient :

$$(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = \mathrm{K}\pi,$$

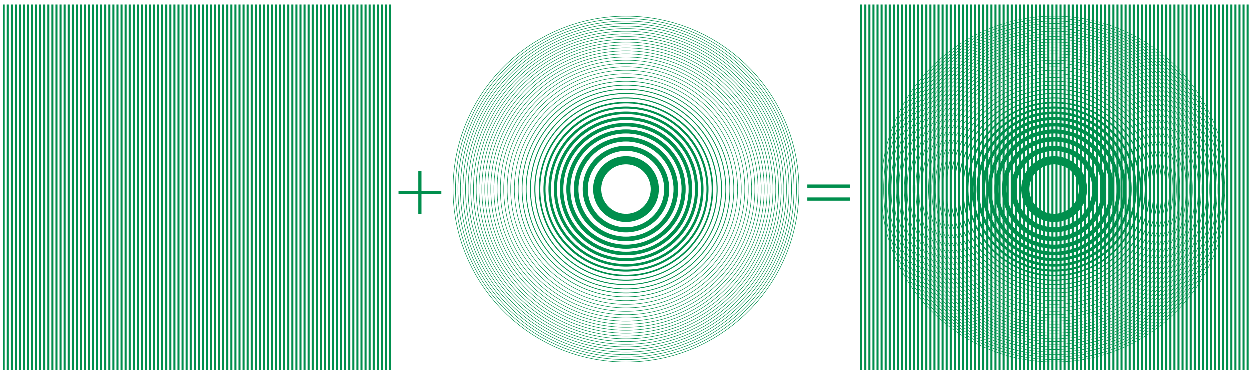
soit

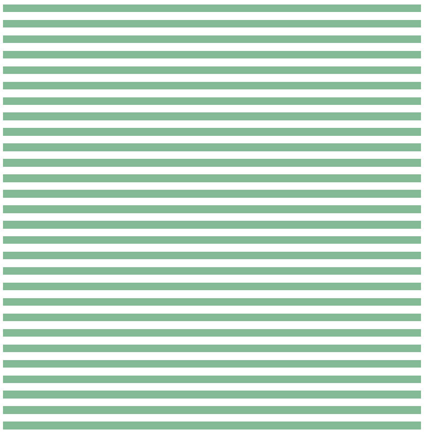
$$x^2 + y^2 = \frac{\mathrm{K}\pi}{2} a^2.$$

C'est bien un faisceau de cercles centrés à l'origine.

Exercice

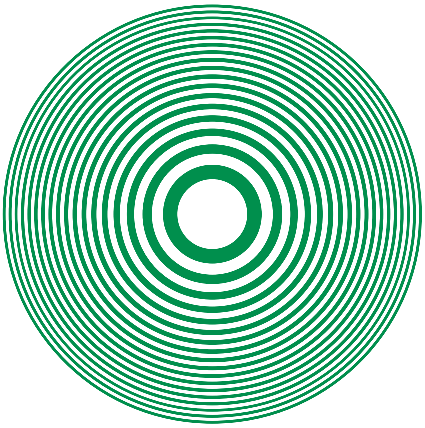
Pourriez-vous démontrer que la superposition d'un faisceau de droites parallèles et d'un faisceau de cercles de Fresnel fait apparaître deux faisceaux de Fresnel supplémentaires (comme ci-dessous) ?



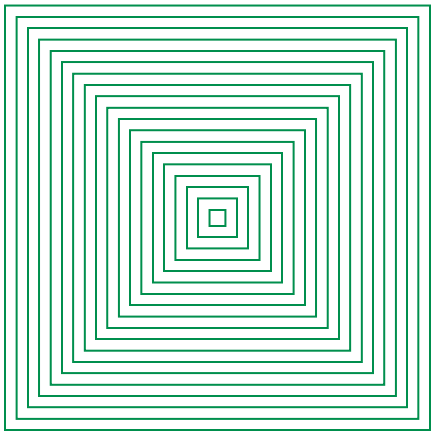


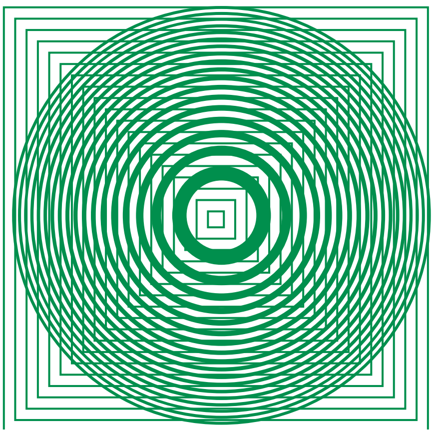
Essayez d'autres moirés et “démontrez-les”.

Superposition d'un faisceau de droites parallèles et d'une spirale.



Superposition d'un faisceau de cercles de Fresnel et de carrés emboîtés.





Si vous possédez un logiciel de dessin “vectoriel” (Illustrator, Freehand, Corel Draw), la construction de moirés en sera grandement facilitée.

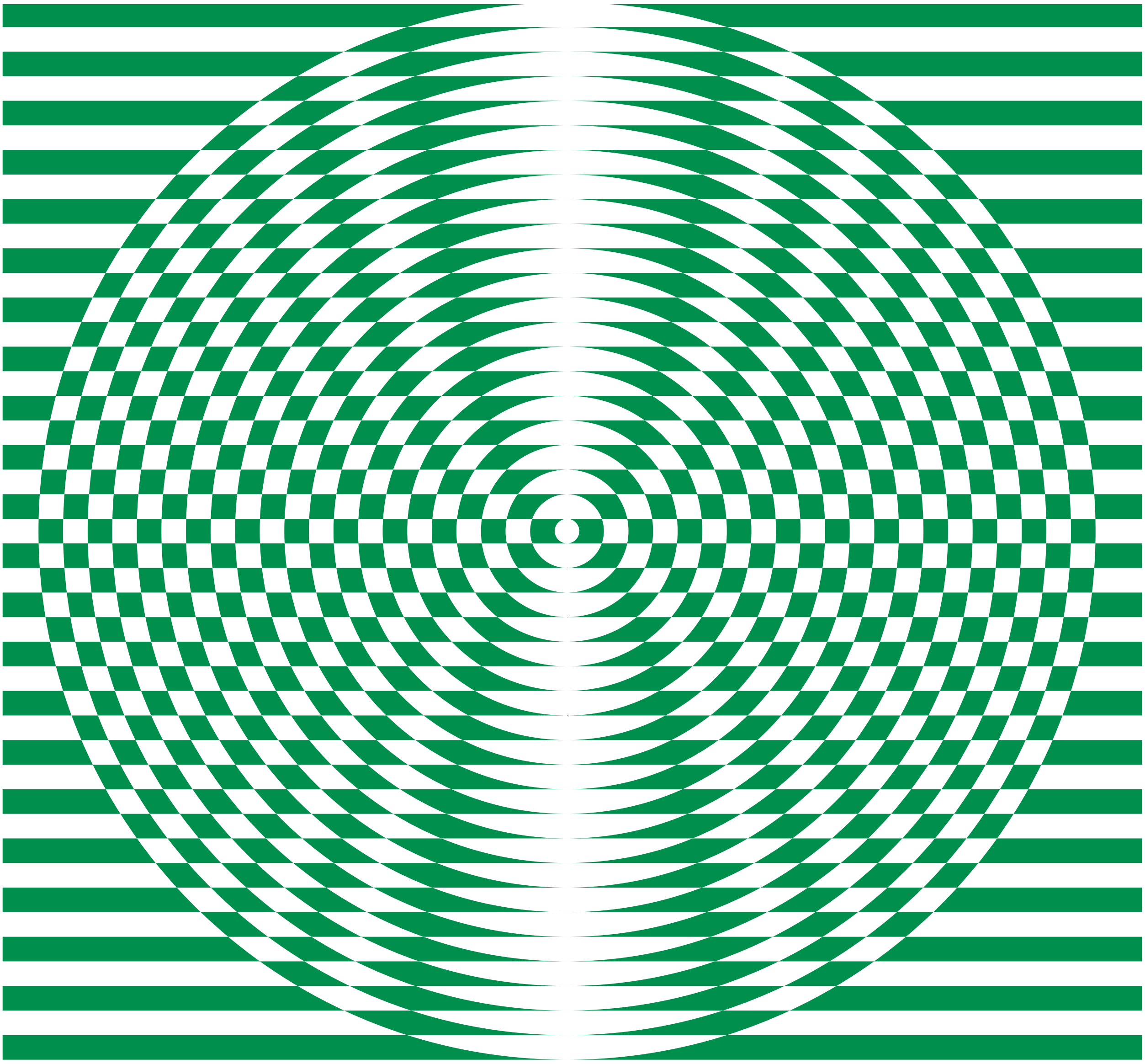
Note : Une première étude, menée par **André Deledicq**, **Hervé Hamon** et **Isabelle Tenaud**, sur les moirés et leur intérêt pour les lycéens, a été éditée par l'IREM de Paris 7 (*Les moirés* - 1978)

Une autre technique pour obtenir des moirés

La technique “op-art” pour obtenir des moirés est très simple même si sa réalisation demande quelques soins :

— tracer deux familles de courbes.

— “quadriller” les intersections obtenues avec deux couleurs.



Ici les familles sont :

- $y = \alpha$
  (une famille de droites “horizontales”)
- $x^2 + y^2 = \beta^2$,
  (une famille de cercles centrés à l'origine).

Avec $\alpha - \beta = k$, et en éliminant α et β, on obtient les équations de la famille de moiré.

Cela donne :

$$x^2 + y^2 = (y - k)^2,$$

soit $x^2 = -2ky + k^2$

$$y = (-\frac{1}{2k})\, x^2 + k^2.$$

On trouve une famille de paraboles d'axe Oy, comme on le vérifie joliment en observant le dessin obtenu.

Le Kangourou sera heureux de publier sur son site *www.mathkang.org* les moirés que vous aurez réalisés et que vous lui aurez envoyés.