Trophées KANGOUROU
Samedi 8 juin 2024

CORRIGÉS DES QUESTIONS

B

1 B Le plus mauvais tirage consiste à prendre une chaussette de chaque couleur pour les 4 premières. Au 5$^{\text{ème}}$ tirage on est sûr d'avoir une paire de la même couleur.
Au 6$^{\text{ème}}$ tirage, si on tire une autre couleur, on aura une autre paire de la même couleur ; sinon au 7$^{\text{ème}}$ tirage, soit on aura deux paires de la même couleur, soit on aura deux paires de deux couleurs différentes (on a fini dans les deux cas).

2 D Sur les 14 enfants présents, 8 peuvent jouer les rôles de *Peau d'âne* et 6 peuvent jouer 6 des 9 rôles de *Barbe bleue*. 9–6, soit 3, devront jouer les deux pièces.

3 E Les 9 premières pages réclament 9 chiffres. Les pages 10 à 99 en réclament 2×90.
Les suivantes en auront donc réclamé 1392−9−180, soit 1203. Et 1203/3=401.
Donc au total, 401 pages à 3 chiffres + 99 pages à un ou deux chiffres, soit 500 pages.

4 C Chaque sommet de l'hexagone est le sommet de 4 angles de 30°. Il n'y a pas d'autres angles de 30° dans la figure. Et 6×4=24.

5 A $$\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

6 A Il y a 5 décompositions de 8 en somme de trois termes :
1+1+6 (non triangle), 1+2+5 (non triangle), 1+3+4 (triangle aplati), 2+2+4 (triangle aplati)
2+3+3 seul triangle (isocèle).

7 E Si le rectangle mesure a×b, la surface de chaque triangle vaut (a/3)×2×(b/3)/2, soit ab/9.
1 − 4/9 = 5/9. L'aire du parallélogramme vaut donc une fraction de l'aire du rectangle égale à 5/9.

8 C Si les côtés des rectangles sont *a* et *b* horizontalement et *c* et *d* verticalement :
Chloé a eu *ac* ; Denise a eu *bc* ; Rachida a eu *ad* ; et Barbara a eu *bd*.
Le produit de la part de Chloé par celle de Barbara est le même que celui de Denise par Rachida : *abcd*. On a donc 36×45=27×Denise, d'où la part de Denise : 36×45/27, soit 60.

9 D Dans l'escalier à 10 marches on peut voir …
…10×11/2 soit 55 carrés de côtés 1
… 8×9/2 soit 36 carrés de côtés 2
… 6×7/2 soit 21 carrés de côtés 3
… 4×5/2 soit 10 carrés de côtés 4
… 2×3/2 soit 3 carrés de côtés 5. Au total 55+36+21+10+3, soit 125.

Subsidiaire : 2^{32} = 4 294 967 296
Sachant que 2^{10} =1024, en approchant 1024 par 1000, on peut approcher 2^{32} par 4 000 000 000 qui est sûrement bien inférieur.
On peut aussi exactement calculer 2^{16} = 1024×64 = 65536 puis effectuer 65536×65536 à la main : 4 294 967 296.
Si on n'a pas le temps, le carré de 65 000 est 4 2250 00 000.

C

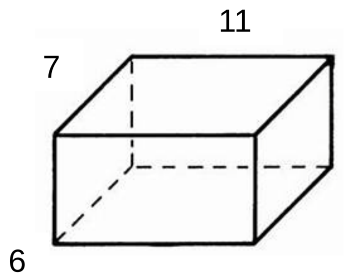
1 A Les plus petits nombres premiers sont 2, 3, 5, 7.
Et 2×3×5×7=210 alors que 2×3×5×7×11 dépasse 1000.
Un nombre inférieur à mille a donc au plus 4 diviseurs premiers différents.

2 E Dans le triangle PBC, Q est le point de concours des médianes. Ce point est au tiers de la médiane [AB] à partir de la base.

3 D S'il y a 100 cars à Brest,12 sont rouges et ont 4 portes (60% de 20).
Et sur les 80 non rouges (100–20), 40 ont 4 portes (50%). La fraction de cars à 4 portes qui est rouge est donc de 12/(40+12) soit 3/13.

4 B Les puissances, comprises entre 1 et 57 d'un nombre sont : 4 8 9 16 25 27 32 36 49.
Les seules dont la somme vaut 57 sont (49 et 8) et (32 et 25).
7^2+2^3 ne convient pas mais 5^2+2^5 = 57. Et 2+5=7.

5 C Au début, la couche supérieure de sucre était de 7×11 sucres et la couche de devant était de 6×11 (la couche, mangée, ayant été de 5×11).
La boîte est donc, au début, le parallélépipède rectangle représenté ci-contre et contenait 6×7×11, soit 462 sucres.
La couche, mangée, sur le côté, faisait donc 5×6 soit 30 sucres.
Finalement, il reste dans la boite 462–77–55–30 soit 300 sucres.
On peut aussi remarquer que le nombre de sucres restant est bien 5×6×10 soit 300.



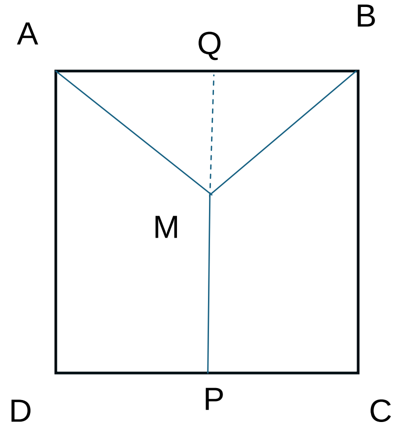
6 D S'il y a *g* garçons et *f* filles, le nombre de couples se connaissant est 10*g* ou 6*f*. Ces nombres étant égaux, c'est donc que *g* est un multiple de 6 et *f* est un multiple de 10. Le seul multiple de 6 entre 25 et 35 est 30. Donc *g*=30, 10*g*=300=6*f*, d'où *f*=50 et *f*+*g*=80.

7 E On peut choisir 2 points sur une droite puis 1 sur l'autre.
Sur la droite de 6 points, on peut choisir 6×5/2, soit 15 couples différents, puis un point sur la droite de 4 points ; cela fait 15×4 soit 60 possibilités.
Ou bien, sur la droite de 4 points, on peut choisir 4×3/2, soit 6 couples différents, puis un point sur la droite de 6 points ; cela fait 6×6 soit 36 possibilités.
A total 60+36, soit 96 possibilités.

8 A Des poids égaux aux puissances de 3 permettent de peser n'importe quel poids, en posant des poids des deux côtés de la balance.
En effet, on a $1+x+x^2+\ldots x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, pour tout x et n.
Donc pour tout x=3 : $2(1+3+3^2+\ldots 3^n) +1=3^{n+1}$.
Montrons alors que si on sait peser avec des puissances de trois jusqu'à 3^n, alors on sait jusqu'à 3^{n+1}.

La formule montre que, avec des poids (présents ou non sur un seul plateau), on peut peser jusqu'à la moitié de 3^{n+1}–1 ; et en mettant 3^{n+1} sur un plateau, on peut peser l'autre moitié en mettant des poids sur le même plateau que la masse à peser.
On sait donc peser jusqu'à 3^{n+1}.

9 E Soit AB=1 et d=AM=BM=PM.
L'aire du triangle ABM vaut MQ×AB/2 soit (1–d)/2.
Et, dans le triangle rectangle AQM : $(1-d)^2+1/4=d^2$.
D'où 2d=5/4. D'où d=5/8 et aire(ABM)= 3/16.



Subsidiaire : 249
Il y a autant de zéros terminant 1000 ! que de 5 dans la décomposition en facteurs de tous les nombres de 1 à 1000. Entre 1 et 1000, il y a …
1000/5, soit 200, multiples de 5
1000/25, soit 40, multiples de 25 (5×5)
1000/125, soit 8, multiples de 125 (5×5×5)
625 (5×5×5×5).
Cela fait un nombre de facteurs 5 égal à 200+40+8+1, soit 249.

J

1 E Si a est positif et b aussi , la somme vaut 3.
Si a est négatif et b aussi , la somme vaut –1.
Si a est positif et b négatif, la somme vaut –1.
Si a est négatif et b positif , la somme vaut –1.
L'ensemble des valeurs possibles est {–1, 3}.

2 B L'aire est divisée par 6 à chaque vœu ; après le troisième, elle a été divisée par 6×6×6, soit 216. Son aire était donc : 4×216=864 en cm^2.
Sa longueur initiale était donc 864/24, soit 36 cm.

3 C Si S est la somme de 23 nombres consécutifs, le 12ème vaut leur moyenne, S/23.
Ce nombre est donc 2024/23, soit 88. Les 23 nombres sont donc les entiers de 77 à 99.
Et 77+99= 176.
Vérification : la somme des nombres de 1 à 76 vaut 77×38, soit 2926 ; celle de 1 à 99 vaut 50×99, soit 4950 ; la somme des nombres de 77 à 99 vaut donc 4950–2926, soit 2024.

4 B Chacun des 8 coins tronqués est un tétraèdre de hauteur 1/2, avec une aire de base 1/2 ×(1/2 × 1/2) soit un volume de 1/3 × (1/8 × 1/2). Les 8 coins ont donc un volume de 1/6, et l'octaèdre a un volume de 1–1/6, soit 5/6.

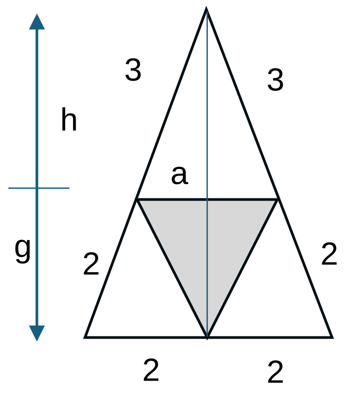
5 D S'il y avait au début n personnes dans la salle, dont la somme des âges était S, on avait : $S/n=n$ et on a ensuite $(S+29)/(n+1)=n+1$. D'où $n^2+29=n^2+2n+1$ et $n=14$.
Après l'arrivée de la personne de 29 ans il y a donc 15 personnes dans la salle.

6 C Le numéro de la chaîne est le produit des nombres sur les boutons. Ces nombres sont donc les facteurs premiers possibles des nombres de 1 à 50 :1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, soit 16 nombres.

7 D Le chiffre des centaines étant choisi entre 1 et 9, il y a 5 possibilités pour choisir le chiffre des unités (de parité telle que leur somme soit paire). Cela fait 45 possibilités.

8 A La hauteur du grand triangle étant *h*, l'aire du grand triangle est $4h/2$, soit $2h$.
La longueur du côté horizontal du triangle grisé étant *a*, on a (d'après Thalès) $4/a=5/3$, d'où $a=12/5$.
Et sa hauteur étant *g* : $g/h=2/5$ d'où $g=2h/5$.

L'aire grisée est alors $ag/2$, soit $12h/25$.
La fraction demandée vaut donc $12/2\times25$ soit $6/25$.



9 C Si la baguette perdue forme un côté du triangle avec celle de …
… 25, les deux autres côtés mesurent 29+41 et 33+37, soit 70 ; et la baguette à réaliser doit mesurer 70–25 soit 45.
… 29 et on ne peut pas former deux côtés égaux avec les autres baguettes.
… 33, les deux autres côtés mesurent 25+41 et 29+37, soit 66 ; et la baguette à réaliser doit mesurer 66–33 soit 33.
… 37 et on ne peut pas former deux côtés égaux avec les autres baguettes.
… 41, les deux autres côtés mesurent 25+37 et 33+29, soit 62 ; et la baguette à réaliser doit mesurer 62–41 soit 21.
Cela fait donc 3 possibilités.

Subsidiaire : 249 998
Le produit des 1000 premiers entiers se termine par 249 zéros.
Et le nombre 2000 ! se termine par 499 zéros. En effet, entre 1 et 2000, il y a …
2000/5, soit 400, multiples de 5
2000/25 soit 80, multiples de 25 (5^2)
2000/125, soit 16, multiples de 125 (5^3)
3 de 625 (5^4).
Cela fait un nombre de facteurs 5 égal à 400+80+16+3, soit 499.
On pourrait parier que le produit des n premiers entiers se termine par n/4 zéros moins 1 (ou plus, si on intuite ce qui se passe à partir de la puissance de 5 qui ne divise pas le nombre dont on étudie la factorielle*). On peut aussi calculer exactement ce nombre :
Il y a autant de zéros terminant 1 000 000 ! que de 5 dans la décomposition en facteurs de tous les nombres de 1 à 1 000 000. Entre 1 et 1 000 000, il y a …
1 000 000/5, soit 200 000, multiples de 5,
1 000 000/25 soit 40 000, multiples de 25, (5^2)
1 000 000/125, soit 8 000, multiples de 125, (5^3)
1 000 000/625, soit 1 600, multiples de 625, (5^4)
1 000 000/3125, soit 320, multiples de 3 125, (5^5)
1 000 000/15 625, soit 64, multiples de 15 625, (5^6)
12 multiples de 78125, (5^7)
2 multiples de 390 625 (5^8)
Cela fait un nombre de facteurs 5 égal à
200 000+40 000+8 000+1 600+320+64+12+2 soit 249 998.