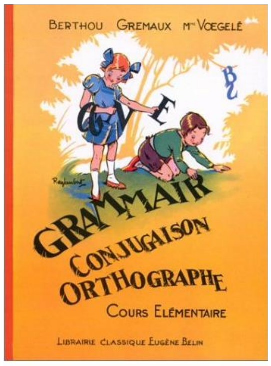
Kepler

et la conjugaison



« Je souhaiterais que vous m'aidassiez à lui écrire… » disait monsieur Jourdain voulant envoyer un billet à la « belle marquise dont les beaux yeux le faisaient mourir d'amour ».

On lui avait, en effet, appris comment *conjuguer* le verbe aimer à la deuxième personne du pluriel du subjonctif imparfait ; et la méthode pour conjuguer un autre verbe se résumait en trois points :

R. Remplacer le radical du verbe *aider* (aid…) par celui du modèle des verbes du premier groupe, le verbe aimer (aim…).

S. Faire ce qu'on *Savait* faire, et qu'on trouve dans les livres de grammaire : conjuguer le verbe *aimer* à la deuxième personne du pluriel du subjonctif imparfait : *que vous aimassiez*.

R^{-1}. Réaliser l'opération inverse de la première : remplacer le radical du modèle par le radical du verbe à conjuguer : *que vous aidassiez*.

Cette suite d'actions, $R.S.R^{-1}$ est très utile et souvent utilisée.

En mathématiques, on lui a donné un nom : *la conjugaison*, notion introduite après Évariste Galois, au XIXe siècle, dans une théorie, alors nouvelle, qui est devenue la « théorie des groupes ».

Certains mathématiciens ont donné un nom imagé à cette notion, comme « le principe de la casserole », ou « le principe du parapluie », … les informaticiens en ont parlé sous le nom de « sous-programme » ou de « procédure »…

$$\begin{array}{ccc} \text{Objet} & \xrightarrow{\quad R \quad} & \\ & & \downarrow S \\ \text{Objet transformé} & \xleftarrow{\quad R^{-1} \quad} & \end{array}$$

En tout cas, c'est une notion universelle, que les résolveurs de puzzles connaissent bien :

Dans la résolution du rubik's cube, par exemple, on se trouve constamment confronté au problème suivant : on a déjà bien monté une partie du puzzle ; par exemple la croix du « premier » étage ; mais pour placer alors un coin du cube, on se voit obliger de détruire la croix déjà faite (R) pour aller chercher ce coin sur la face opposée (S) ; alors en amenant ce coin à sa place, on reconstruit la croix (R^{-1}).

Ce mouvement est bien une « conjugaison » :

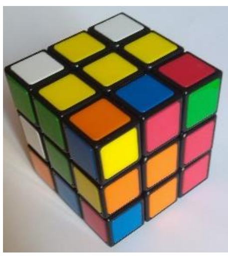
R : on « casse » la première croix déjà réalisée,

S : en tournant la face inférieure, on amène le cube-coin juste sous la bonne place,

R^{-1} : on reconstruit la croix (momentanément) détruite.

La croix jaune est bien faite sur la face du dessus.

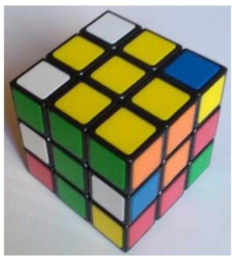
R : tourner la face droite.



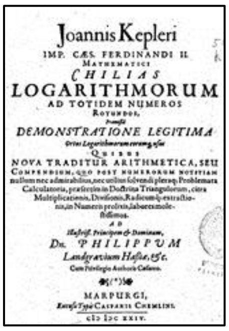
Il y a un cube coin avec une face jaune latérale sur la face du bas.

S : tourner la face du bas.

R^{-1} : tourner la face droite dans l'autre sens.



L'astronome Kepler (1571-1630) fut certainement le premier mathématicien à utiliser le principe de conjugaison en mathématiques…



Il s'en est servi systématiquement pour réaliser, après Neper en 1614, une table de logarithmes intitulée *Chilias logarithmorum* (des milliers - pour kilo - de logarithmes).
Dans son ouvrage *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Neper avait en effet donné une table de la fonction « logarithme ». Cette fonction, transformant la multiplication en addition, simplifiait beaucoup les fastidieux calculs des astronomes. Aujourd'hui notée « ln » elle vérifie la relation $\ln(a\times b)= \ln(a)+\ln(b)$.
Neper se servait, pour bâtir la première table de son *logarithme* de la précieuse propriété suivante, qu'il avait démontrée :
pour x très petit $\ln(1+x)=x$.
Comme Neper, donc, Kepler savait calculer le logarithme d'un nombre très voisin de 1.
Ainsi : $\ln(1{,}021897) = 0{,}021661$ (trois décimales exactes sont donc données par l'approximation $\ln(1+x) \approx x$).
Pour calculer le logarithme d'un nombre quelconque, Kepler décide alors de la méthode suivante :
R : appliquer une transformation qui rapproche ce nombre de 1,
S : calculer son logarithme (c'est-à-dire, tout simplement, lui enlever 1),
R^{-1} : appliquer au résultat la transformation « inverse » !

La transformation, choisie par Kepler (celle qui rapproche de 1 un nombre supérieur à 1) consiste à prendre la racine carrée, autant de fois qu'il le faut pour être assez proche de 1.
Or, le logarithme de la racine carrée d'un nombre s'obtient en divisant par 2 le logarithme de ce nombre.
La transformation « inverse », dans le contexte des logarithmes, est donc tout simplement la multiplication par 2 !
Le calcul peut, aujourd'hui, être mené par un collégien disposant d'une calculatrice élémentaire, à partir du schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
\text{nombre } x \arrow[r, "\text{prendre n fois la racine carrée de 2}"] & \text{nombre a proche de 1} \arrow[d, "\text{soustraire 1}"] \\
\text{nombre proche de } \ln(x) & \text{nombre proche de } \ln(a) \arrow[l, "\text{multiplier n fois par 2}"']
\end{tikzcd}$$

Calcul approché du logarithme népérien de 2 :

1. Frapper au clavier 2 et la machine affiche 2
   √ 1.414213
   √ 1.189207
   √ 1.090507
   √ 1.044273
   √ 1.021897
2. Soustraire 1
   –1= 0.021897
3. Frapper au clavier … et la machine affiche …
   ×2= 0.043794
   ×2= 0.087588
   ×2= 0.175176
   ×2= 0.350352
   ×2= 0.700704

Ces quelques petits calculs donnent déjà une très bonne approximation de ln(2) [qui vaut 0.693147…].

André Deledicq