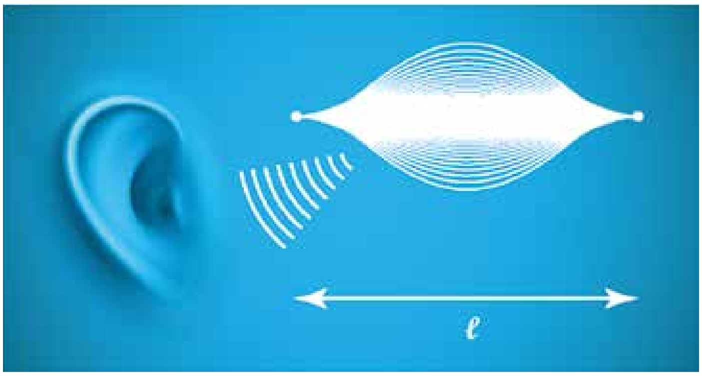
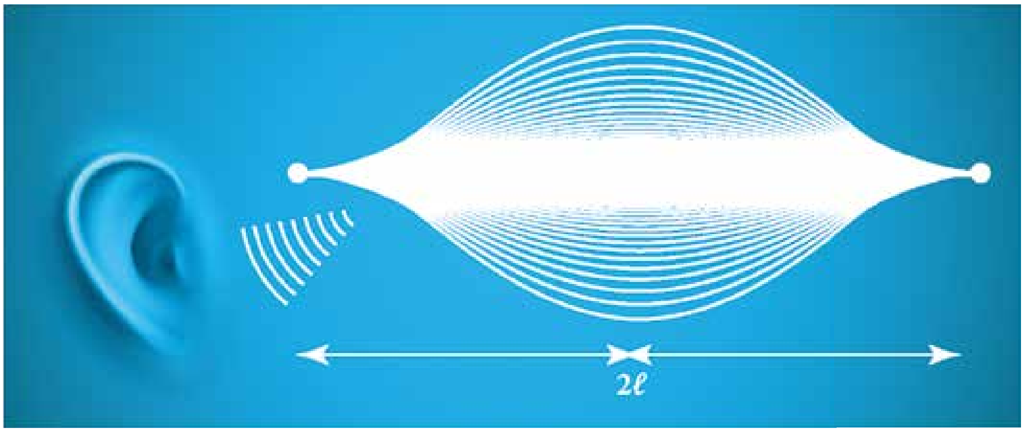
Un peu d'harmonie

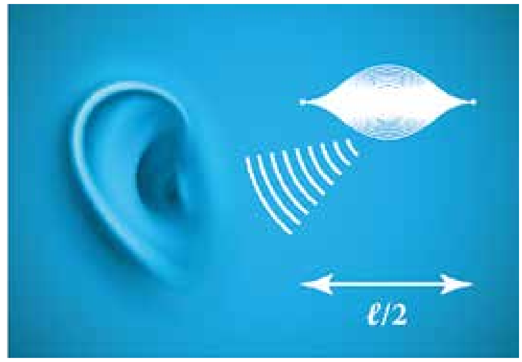
Comme l'écrivait **Leibniz** en 1712 à son ami **Golbach** : « *La musique est un exercice d'arithmétique secrète et celui qui s'y livre ignore qu'il manie des nombres* ».
En fait les rapports entre les nombres et la musique étaient bien connus des Chinois, 20 siècles avant J.-C. et du monde grec, 6 siècles avant J.-C. ; ainsi, on attribue à Pythagore la découverte de l'explication physique de ces rapports.
Tout vient des impressions que produisent à nos oreilles les « cordes » que l'on fait vibrer. Ainsi, pinçons une corde de métal (comme une corde de guitare) de longueur ℓ et faisons la vibrer…
Les vibrations transmises par l'air à notre oreille nous donnent une certaine impression sonore (par exemple un musicien y reconnaîtra un FA).



Faisons maintenant vibrer une corde identique de longueur 2ℓ.
C'est assez étonnant mais nous sommes ainsi fait que notre oreille aura la même impression sonore : le son perçu sera plus grave mais on aura l'impression d'un « même » son
(le musicien y reconnaîtra le FA de l'octave en dessous du précédent).



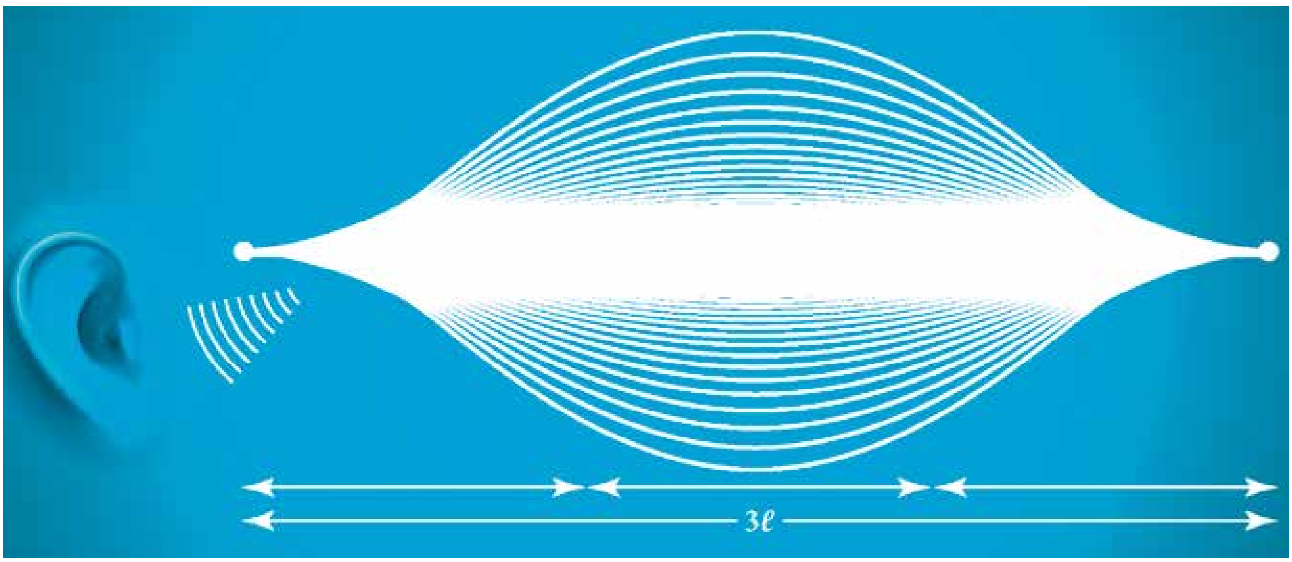
Faisons maintenant vibrer une corde identique de longueur $\ell/2$.
Notre oreille aura encore la même impression sonore : le son perçu sera plus aigu, mais on aura l'impression d'un « même » son (le musicien y reconnaîtra le FA de l'octave en dessus du premier FA).



Conclusion : les cordes de longueurs respectives 1, 2, 4, 8, 16, … , 1/2, 1/4, 1/8, … émettent des sons qui semblent être la même « note » (à des octaves différentes).

Les puissances de 2 et de 3

Mais que se passe-t-il si nous faisons alors vibrer une corde identique de longueur 3ℓ…



Le fait extraordinaire est le suivant : l'impression sonore n'est pas la même que les deux premières fois, mais elle semble « en accord » avec les précédentes ; et si l'on écoute ensemble les 3 sons produits, on perçoit deux «notes qui vont bien ensemble» (le musicien reconnaîtra dans la troisième note un DO, situé une « quinte » plus bas que le deuxième FA).

Évidemment on peut dire la même chose si, au lieu de multiplier les longueurs des cordes par 3, on les divisait par 3.
De sorte que : 1, 2, 4, 8, 16, … , mais aussi des cordes de longueurs 1, 3, 9, … , mais aussi $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \ldots$ émettent des sons qui « s'accordent ensemble ».
Tout se passe donc entre les puissances de 2 et de 3 et leurs rapports.

L'idéal serait de n'émettre que des sons qui vont bien ensemble deux par deux comme ceux de la suite :

$$1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right), \frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\right), \ldots \quad \text{c'est-à-dire} : 1, \frac{3}{2}, \frac{3^2}{2^2}, \frac{3^3}{2^3}, \frac{3^4}{2^4}, \ldots$$

L'ennui, c'est que l'on engendre ainsi une infinité de « notes » émises par les cordes dont les longueurs sont des puissances de 3 (à des divisions par 2 près). Évidemment s'il arrivait qu'une certaine puissance de 3 soit aussi une puissance de 2, on pourrait arrêter là la suite et on aurait une suite de «notes» allant bien ensemble et finie.
Malheureusement l'arithmétique est impitoyable :
aucune puissance de 3 ne vaut exactement une puissance de 2 !

n	2^n	3^n
1	2	3
2	4	9
3	8	27
4	16	81
5	32	243
6	64	729
7	128	2 187
8	256	6 561
9	512	19 683
10	1 024	59 049
11	2 048	177 147
12	4 096	531 441
13	8 192	1 594 323
14	16 384	4 782 969
15	32 768	…
16	65 536	…
17	131 072	…
18	262 144	…
19	524 288	…
20	1 048 576	…

La gamme des instruments à cordes

Mais heureusement, notre oreille a ses limites de perception et certaines puissances de 3 ne sont pas loin de certaines puissances de 2. Voyons un peu les tables ci-contre.

— 3^2 (c.-à-d. 9) n'est pas loin de 2^3 (c.-à-d. 8) mais cela fait quand même plus de 10 % de différence.

— 3^5 (c.-à-d. 243) n'est pas loin de 2^8 (c.-à-d. 256) et cela ne fait que 5 % de différence.

— 3^{12} (c.-à-d. 531 441) n'est pas loin de 2^{19} (c.-à-d. 524 288). Et là, la différence n'est qu'un peu plus de 1 %.

Tout le secret de la musique est là :

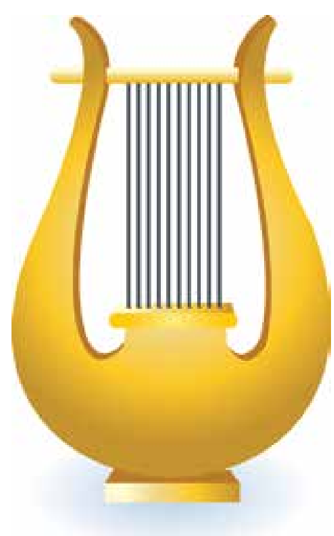
$$3^{12} \approx 2^{19} \; (531\,441 \approx 524\,288),$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7$$

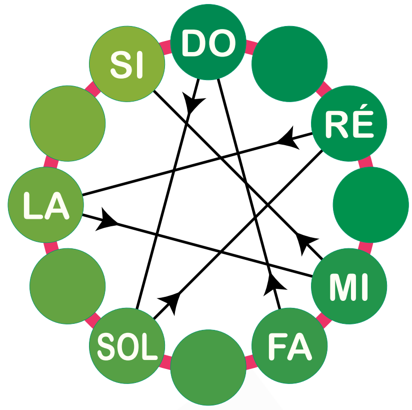
Faisons donc se suivre douze quintes (associées à des multiplications par 3/2), à travers sept octaves (associées à des multiplications par 2), à partir d'un FA.

1			(FA)
3 / 2	c'est-à-dire	1,5	(DO)
9 / 4	dont la moitié vaut	1,125	(SOL)
27 / 8	dont la moitié vaut	1,6875	(RÉ)
81 / 16	dont le quart vaut	1,2656	(LA)
243 / 32	dont le quart vaut	1,8984	(MI)
729 / 64	dont le huitième vaut	1,4238	(SI)
2 187 / 128	dont le 16^e^ vaut	1,0679	(FA#)
6 561 / 256	dont le 16^e^ vaut	1,6018	(DO#)
19 683 / 512	dont le 32^e^ vaut	1,2014	(SOL#)
59 049 / 1 024	dont le 32^e^ vaut	1,8020	(RÉ#)
177 147 / 2 048	dont le 64^e^ vaut	1,3515	(LA#)
et			
531 441 / 4 096	dont le 128^e^ vaut	1,0136	(FA)



qui ne diffère de 1 que d'une valeur très petite que les musiciens appellent «comma».

En remettant les notes dans l'ordre croissant des longueurs des cordes vibrantes qui les émettent, on retrouve bien l'ordre des 12 demi-tons de la gamme classique :
FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI, DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI.



Et il est assez joli de les représenter sur un cercle où l'on passe d'une note de la gamme majeure à la suivante (située 5 demi-tons plus bas, correspondant à une longueur de corde multipliée par 1,5).

Si vous avez une guitare, vous pouvez vérifier que les longueurs des cordes pincées entre les barres du manche et leur attache commune sont bien exactement les longueurs calculées à partir des puissances de 2 et de 3 (l'unité mesurant entre 30 et 35 cm selon les guitares), à savoir : 1
1,0679
1,125
1,2014
1,2656
1,3515
1,4238
1,5
1,6018
1,6875
1,8020
1,8984
2
Fabuleux, non ?

Une formule utile

En fait, quel que soit le nombre x, on a
$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{p-1}) \times (x - 1) = x^p - 1,$$
comme on le voit en posant la multiplication :
$$\begin{array}{rl} & 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{p-1} \\ & \times (x-1) \\ \hline & x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{p-1} + x^p \\ & -1 - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^{p-1} \\ \hline & -1 \qquad\qquad\qquad\qquad + x^p \end{array}$$

Pour $x = 2$, cela donne : $\mathbf{(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{p-1}) = 2^p - 1}$.