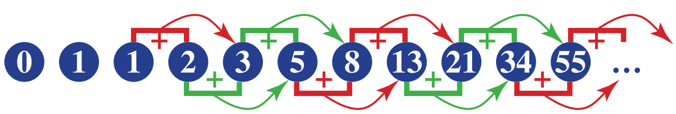
La suite de Fibonacci se cache dans les piquants de l'aloès.

La suite de Fibonacci

La suite définie pour tout entier naturel n, par
$F_0 = 0,\ F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
engendre les nombres : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, …



Voici un résumé des propriétés de cette suite :

- $F_n^{\,2} - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$ (Voir page 25.)
- $F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n = F_n^{\,2}$
- $F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$ (Superbe ! non ?)
- $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_0 + F_2 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- $F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \ldots + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$
- $F_0^{\,2} + F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + \ldots + F_n^{\,2} = F_nF_{n+1}$ (Décomposition d'un rectangle en carrés.)
- $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ et donc $F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1})$
- La suite des quotients $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ a pour limite le nombre d'or Φ.

La suite de Fibonacci est très célèbre et le Kangourou en a déjà parlé dans ses ***Malices*** et ses ouvrages.
Des milliers de pages de nombreux auteurs l'ont célébrée…
Cette suite est très liée au nombre d'or.
En particulier :

$$\frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\frac{13}{8} = 1{,}625$$

$$\frac{21}{13} \approx 1{,}615$$

$$\frac{34}{21} \approx 1{,}619$$

$$\frac{144}{89} \approx 1{,}6180.$$

Mais la propriété la plus fabuleuse est celle qui lie les nombres de la suite de Fibonacci au nombre d'or et à son conjugué…
À la calculatrice, calculons le nombre

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\right]$$

c'est-à-dire, en ne conservant que trois décimales après la virgule :

$$\frac{1}{2{,}236}[(1{,}618)^5+(0{,}618)^5]=4{,}999,\ \text{soit } 5\ !!!$$

Mais le plus beau c'est que, pour tout entier n, le nombre

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

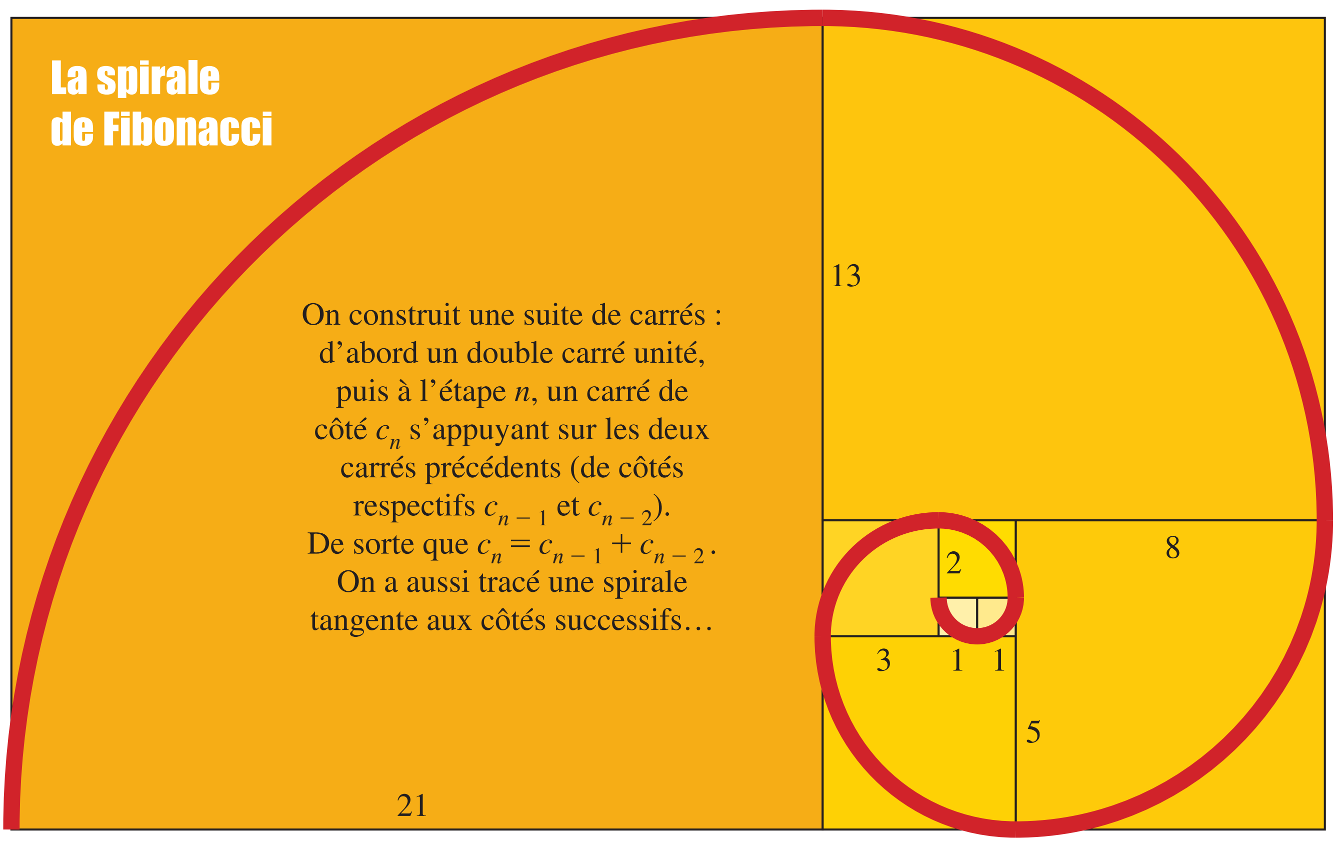
vaut exactement un nombre entier !
Ce nombre est tout simplement le $n$ième nombre de Fibonacci

$$F_n=\frac{\Phi^n-\overline{\Phi}^n}{\sqrt{5}}.$$

La statue de Leonardo da Pisa (Fibonacci). Œuvre de Giovanni Paganucci, 1863. Pise, *Camposanto Monumentale*.

Fibonacci, le monde, la nature et les hommes

De nombreuses situations, naturelles ou artificielles, font intervenir des suites de Fibonacci. En voici quelques-unes.



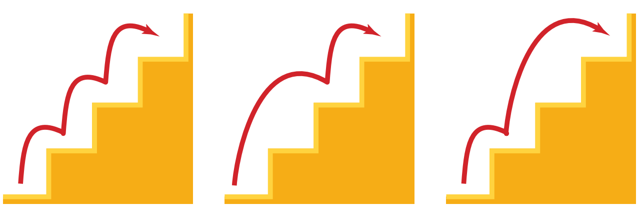
Les lapins de Fibonacci

Voici la situation, historique, étudiée par Fibonacci lui-même.
Soit un couple de lapins mathématiques.
Les lapins mathématiques sont très productifs : dès le deuxième mois de leur existence, chaque couple donne naissance, chaque mois, à un nouveau couple. De sorte que leur population croît rapidement (en plus, il faut le savoir, nos lapins mathématiques sont immortels).
Établir la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n). Et trouver u_n.

Le lièvre d'Albrecht Dürer (1502).

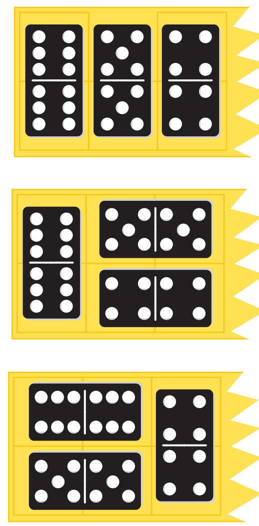
Les marches de Fibonacci

On peut monter un escalier, tranquillement, ou bien, sauter une marche si, et quand, on le veut (on fait donc des pas de une ou de deux marches).


Voici toutes les manières différentes de grimper un escalier de trois marches.
Combien y a-t-il de manières différentes de monter un escalier de n marches ?
Il faut, comme le célèbre reporteur-détective Rouletabille, prendre le problème par le bon bout de la raison ! Autrement dit, ici, se demander, après l'escalade, quelle était la longueur du dernier pas, une ou deux marches ?

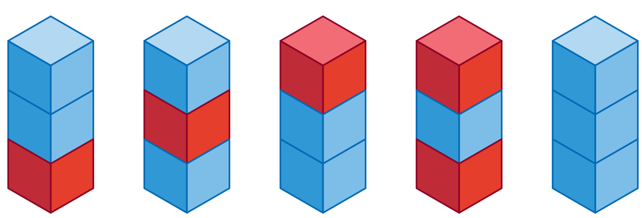
Les dominos de Fibonacci

On dispose d'un plumier de largeur égale à la longueur d'un domino. On s'intéresse aux différentes manières de ranger n dominos dans les n premières colonnes de ce plumier…
Combien y a-t-il de telles manières ?


Les 3 manières de ranger 3 dominos.
Il y a exactement…
F_{n+1} manières de ranger n dominos !
Sauriez-vous dire pourquoi ?

Les tours de Fibonacci

Avec des cubes rouges ou bleus on construit des tours de n étages, en respectant la règle suivante :
il n'y a jamais deux étages rouges consécutifs !
Il y a exactement F_{n+2} tours différentes à n étages.
Expliquez pourquoi !


Les 5 tours à 3 étages.

SOLUTIONS

Les lapins

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Les lapins de la génération $n + 2$ sont ceux de la génération $n + 1$ (toujours tous en vie) + ceux de la génération n dont chacun est en âge de se reproduire.

Les marches

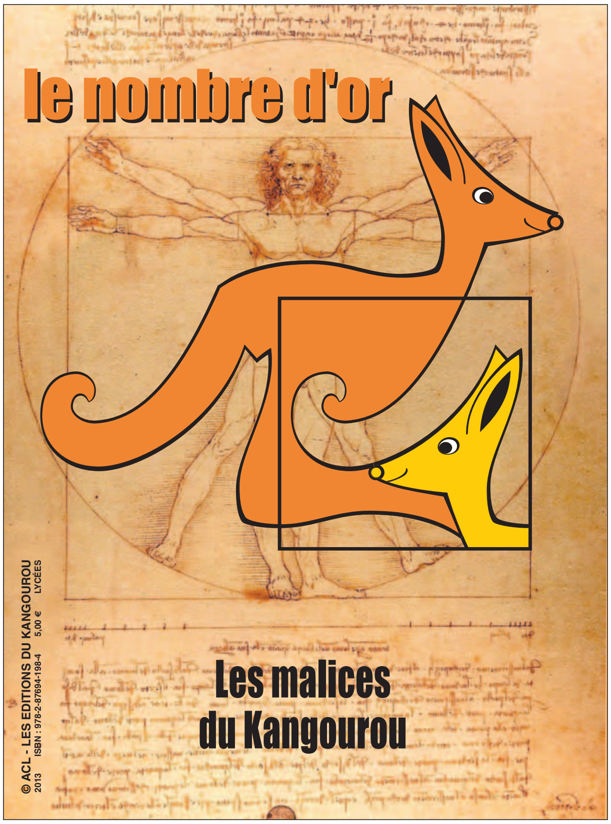
Quand on est sur la marche $n + 2$, on peut (tout simplement) soit venir de la marche $n + 1$, soit venir de la marche n.

Les dominos

Le nombre de dominos rangés est aussi la “longueur” rangée (mesurée en largeur de dominos).
Pour arriver à une certaine longueur ($n + 2$), on vient de placer soit un domino “vertical” (et alors, avant, une longueur $n + 1$ était déjà placée), soit deux dominos “horizontaux” (et alors avant, une longueur n était déjà placée).

Les tours

Lorsqu’on arrive à une tour de n étages, soit elle est de sommet bleu et on peut avoir construit (avant) n’importe quelle tour de $n - 1$ étages, soit elle de sommet rouge et alors l’avant-dernier étage est forcément bleu et on peut avoir construit avant n’importe quelle tour de $n - 2$ étages.



Ces pages sont extraites de l’ouvrage
Le nombre d’or • Les malices du Kangourou
ISBN : 978-2-87694-198-4