KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 90 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2024 - Corrigé du sujet « J »

1. Réponse **A.** Après simplification par 2024, on a $\frac{2{,}024}{202{,}4} = 0{,}01$.

2. Réponse **E.** Les deux polygones du carré E sont différents. (On peut remarquer aussi que les quatre autres figures ont le centre du carré comme centre de symétrie.)

3. Réponse **D.** Les *poids* sont $1+3+5=9$ (Q), $2+3+6=11$ (R) et $1+2+4=7$ (S). Le plus grand est 11.

4. Réponse **C.** Sur 4 sauts successifs, le pied droit touche le sol 3 fois. Donc sur 48 sauts, comme $48=4\times 12$, il touche 3×12, soit 36 fois le sol.

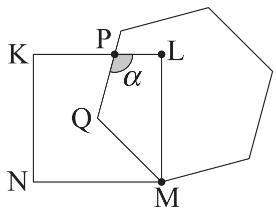
5. Réponse **B.** Le plus court chemin s'obtient en commençant et en finissant aux extrémités des deux segments les plus longs, et en passant deux fois sur les 4 segments les plus courts. La distance est alors : $3+2\times(1+1+1+2)+2=15$.

6. Réponse **A.** En divisant la figure selon les médianes du carré, on obtient 4 petits carrés, chacun avec un cercle inscrit, une région noire et 3 régions grisées identiques à la région noire. L'aire totale des parties grisées vaut donc 3 fois l'aire en noir.

7. Réponse **D.** Sur la table, autour des cubes du bas de la pyramide, il faut poser 8 cubes ; au niveau au-dessus, il faut 4 cubes ; et il faut 1 cube tout en haut. Cela fait $8+4+1$, soit 13 cubes au total.

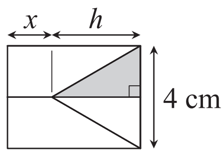
8. Réponse **E.** On cherche le plus grand nombre à trois chiffres qui est pair (car multiple de 6), dont le chiffre des centaines est pair et égal au chiffre des unités, et qui est aussi divisible par 3. Ce nombre est 888 et la somme de ses chiffres est 24.

9. Réponse **A.** Appelons P le sommet de l'angle α.
Alors, dans le quadrilatère PQML, on a $\widehat{Q} = 120°$ (l'hexagone est régulier), $\widehat{M} = 45°$ et $\widehat{L} = 90°$. Et donc :
$\alpha = 360° - (120° + 90° + 45°) = 105°$.



10. Réponse **B.** $16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15} = 4 \times (4^2)^{15} = 4 \times 4^{30} = 4^{31}$.

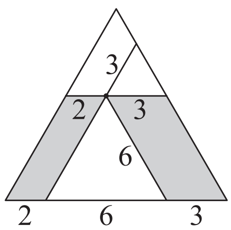
11. Réponse **B.** La hauteur h du triangle équilatéral de côté 4 est $2\sqrt{3}$.
(On peut la retrouver en utilisant Pythagore dans le demi-triangle grisé d'hypoténuse 4 : $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.)



L'aire du triangle équilatéral est donc : $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
L'aire du rectangle vaut 3 fois plus : $12\sqrt{3}$.
Ce rectangle, de largeur 4, a donc une longueur égale à $\frac{12\sqrt{3}}{4}$ soit $3\sqrt{3}$.
Et la longueur cherchée est $x = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

12. Réponse **C.** Soient x et y les largeur et longueur du rectangle (en m). On a $2(x + y) = 40$, d'où $x + y = 20$. On cherche les paires de nombres premiers de somme 20. Il y en a deux : $\{17\,;3\}$ et $\{13\,;7\}$. C'est avec la deuxième qu'on obtient la plus grande aire : $13 \times 7 = 91$ (en m^2).

13. Réponse **C.** On obtient la figure ci-contre en prolongeant les segments mesurant 2 et 3. Les segments tracés à l'intérieur du triangle initial étant parallèles à ses côtés, les triangles formés ont aussi leurs trois angles égaux à 60° et sont donc équilatéraux. De plus, les deux quadrilatères grisés sont des parallélogrammes et ont donc leurs côtés opposés égaux. Ainsi, le côté du triangle initial vaut : $2 + 6 + 3 = 11$.
Et son périmètre est $3 \times 11 = 33$ (en m).



14. Réponse **B.** Les 4 lettres différentes doivent être placées dans le carré 2×2 central. Il y a 4 possibilité pour placer la 1re lettre puis 3 pour placer la 2e, puis 2 pour placer la 3e et la 4e lettre sera dans la seule case encore libre. Cela fait $4\times3\times2\times1$ soit 24 manières de remplir ce carré (l'image montre un des remplissage possible).

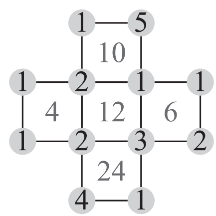
	M	I	
	R	O	
O	M	I	
	R	O	
O	M	I	R
I	R	O	M

Une fois ces quatre lettres placées, le remplissage ne peut se faire que d'une seule manière : chaque case située à un coin doit avoir une lettre différente des deux de la même ligne et de la lettre de l'autre ligne appartenant au même carré 2×2 (dans l'exemple ci-contre la case en haut à gauche ne peut être ni M ni I, qui sont sur la même ligne, ni R qui est dans un même carré 2×2). Finalement, il y a donc 24 manières de remplir ces cases.

15. Réponse **D.** Soient N, G et B les aires des disques noir, gris et blanc. Avec la figure 1, on a $J=N-G=7B$.
Avec la figure 2, on a $K=N-G-B$ et donc $K=6B$. D'où $\dfrac{K}{J}=\dfrac{6}{7}$.

16. Réponse **B.** Si les âges sont des nombres pairs une certaine année, ils le sont aussi deux ans après quand la petite-fille a deux ans. Comme la décomposition en facteurs premiers de 2024 est $2024=2^3\times11\times23$, les trois âges, alors, ne peuvent être que 2, 22 et 46. L'âge de Philippe « aujourd'hui » est donc $46-2$ soit 44 ans.

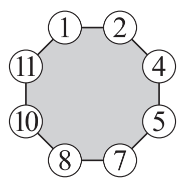
17. Réponse **B.** Soit P le produit cherché. En faisant le produit des nombres à l'intérieur des quatre carrés extérieurs, on trouve le produit de 16 nombres : les nombres associés aux 8 sommets marqués d'un point noir et 2 fois chacun des nombres associés aux quatre autres sommets (ceux du carré central).



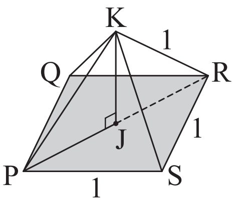
On a donc $P = \dfrac{4\times10\times6\times24}{12\times12} = 40$.
La figure ci-contre montre un exemple possible de nombres associés aux 12 sommets.

18. Réponse **D.** Les petits cubes avec une seule face peinte sont ceux de chacune des 6 faces qui ne sont pas sur le côté de la face ; il y en a $6\times(n-2)^2$. Les petits cubes qui n'ont aucune face peinte sont ceux qui sont à l'intérieur du cube ; il y en a $(n-2)^3$.
On a donc $6\,(n-2)^2 = (n-2)^3$. $6=n-2$ (puisque $n\neq2$). $n=8$.

19. Réponse **E.** Si un multiple de 3 est placé à un sommet de l'octogone alors son voisin devra être aussi un multiple de 3 et donc tous les nombres sur l'octogone aussi. C'est impossible. Il faut donc n'utiliser aucun multiple de 3 donc aucune des cartes 3, 6, 9, 12.



La situation est possible, comme le montre l'exemple ci-dessus.



20. Réponse **B.** Soient P, Q, R et S les quatre sommets ayant une arête commune avec K : ils forment un carré de côté 1 dont le centre J est sur le segment [KL]. Le triangle KJP est un triangle rectangle en J, son hypoténuse [KP] mesure 1 et son côté [JP] mesure la moitié de la diagonale du carré soit $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On a donc $KJ^2 = KP^2 - JP^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Et $KJ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Le même longueur se retrouve de l'autre côté du segment [KL] qui a donc pour longueur $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit $1 + \sqrt{2}$.

21. Réponse **C.** Les phrases A et E ne peuvent pas être vraies toutes les deux. La phrase D ne peut être qu'un mensonge. On est donc sûr qu'au moins 2 des 5 phrases sont fausses et donc que c'est un jour où Kongwi ne fait que mentir. Et, puisque 11 divise 2024, la phrase qu'il n'a pu prononcer est donc la C. (On sait aussi que ce jour n'est ni un jeudi ni un vendredi mais peut être un des autres jours de la semaine.)

22. Réponse **B.** L'aire totale des 6 faces du grand cube est $3 \times 3 \times 6$ soit 54. Le tiers de cette aire est donc 18.
Un petit cube placé à l'un des 8 sommets du grand cube a 3 faces visibles.
Un petit cube placé au milieu d'une des 12 arêtes a 2 faces visibles.
Un petit cube placé au centre d'une des 6 faces a 1 face visible.
Le petit cube placé au centre du grand cube n'a aucune face visible.
Pour utiliser le moins possible de cubes bleus, il faut donc en placer 6 aux sommets (aire visible : $3 \times 6 = 18$).
Pour utiliser le plus possible de cubes rouges, il faut en placer 1 au centre du cube, 6 au centre d'une face (aire : 6) et 6 au milieu d'une arête (aire : $2 \times 6 = 12$). Cela fait $1 + 6 + 6$ soit 13 cubes (et bien une aire visible égale à $12 + 6$ soit 18).
Mélissa utilise donc $27 - 6 - 13$, soit 8 cubes blancs.

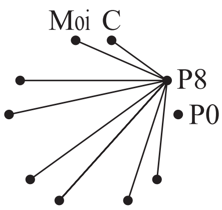
23. Réponse **A.** Pour chacune des vitesses, 2 km/h, 3 km/h et 4 km/h, appelons t_2, t_3 et t_4 les durées de marche correspondantes et d_2, d_3 et d_4 les distances parcourues à cette vitesse. On a d'une part $t_2 = t_3 + t_4$ et d'autre part $d_3 = d_2 + d_4$ qu'on peut aussi écrire $3t_3 = 2t_2 + 4t_4$.
Et en éliminant t_3, $3t_2 - 3t_4 = 2t_2 + 4t_4$, d'où $t_4 = \frac{1}{7} t_2 = \frac{1}{14}(t_2 + t_3 + t_4)$.
Le temps passé à marcher à 4km/h est $\frac{1}{14}$ du temps total de marche.

24. Réponse **C.** Puisque la décomposition en facteurs premiers de n inclut 47 mais n'inclut pas 53 (qui est le plus petit premier supérieur à 47), c'est que $47 \leqslant n \leqslant 52$. Puisque 13^4 figure dans la décomposition c'est que 13, 26, 39 et 52 sont parmi les nombres de 1 à n. On en déduit que $n = 52$. Il y a 3 multiples de 17 inférieurs ou égaux à 52 (17, 34 et 51) et donc l'exposant de 17 dans la décomposition en facteurs premiers est 3.

25. Réponse **0.** Pour obtenir une puissance de 6 sans utiliser le nombre 6, on peut faire $2 \times 3 = 6$, ou bien $3 \times 3 \times 4 = 6^2$ qui est la solution utilisant le moins de dés (pour des puissances paires).
On obtient ainsi 6^2 en 3 lancers de dé et donc 6^{32}, égal à $\left(6^2\right)^{16}$, en 3×16 donc 48 lancers.
On peut alors avec 2 lancers supplémentaires faire $2 \times 3 = 6$.
Il est donc possible d'obtenir 6^{33} en faisant 50 lancers (33 fois « 3 », 16 fois « 4 » et 1 fois « 2 ») sans jamais avoir obtenu 6 avec le dé.
Le minimum demandé est 0.

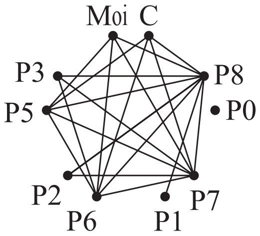
26. Réponse **4.** Chacun ne peut avoir topé (qu'on utilisera ici pour « échangé une poignée de mains ») qu'avec au maximum 8 personnes donc les 9 réponses différentes reçues sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

• La personne P8 ayant topé 8 fois est en couple avec la personne P0 ayant topé 0 fois car les huit autres personnes ont topé au moins une fois puisqu'elles ont topé avec P8.



• La personne P7 ayant topé 7 fois n'a topé ni avec son conjoint ni avec P0, elle a donc topé avec les sept autres personnes. Ces 7 personnes ont donc topé au moins deux fois (avec P7 et P8). La personne P1 ayant topé une seule fois est donc le conjoint de P7.

• Avec le même raisonnement, on conclut d'abord que les personnes ayant topé 6 fois et 2 fois sont en couple, puis que les personnes ayant topé 5 fois et 3 fois sont en couple.
Et mon conjoint a donc topé 4 fois.
On peut visualiser la situation avec un dessin où les personnes sont groupées par couple et réparties sur un cercle.
Remarque : j'ai, comme mon conjoint, échangé 4 poignées de mains.



Jean-Philippe Deledicq