KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 90 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2024 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse **C.** Les pièces pentagonales proposées ont deux angles droits qu'il faut placer aux bons endroits en les faisant tourner d'un demi-tour. Et c'est la pièce C qui donne un chemin continu et fermé.

2. Réponse **E.** La somme des trois angles d'un triangle est 180°. Soit x le grand angle cherché (en degrés). On a $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=180$. Donc $9x=6\times 180$ et $x=120$.

3. Réponse **C.** Parmi les nombres proposés seul 38 a les trois propriétés souhaitées : $38=40-2$, $38=6^2+2$, $38=2\times 19$.

4. Réponse **E.** Chacune des 6 parts a un angle au centre égal à 60° ($360\div 6=60$). En réarrangeant les 5 parts restantes, l'angle entre deux parts voisines est, en degrés, $60\div 5$ soit 12.

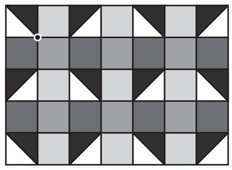
5. Réponse **D.** La représentation graphique de $y=x+1$ est une droite passant par les points $(-1\,;0)$ et $(0\,;1)$.

6. Réponse **D.** Soit n le côté d'un carré noir en cm. La longueur d'un rectangle gris, 23, vaut aussi $11+2n$. D'où $2n=12$ et $n=6$.

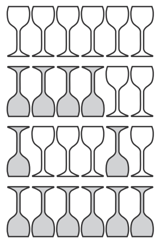
7. Réponse **D.** P(1) étant la probabilité d'obtenir un 1 et P(6) un 6, on a : $\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(6)=1-4\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ et $\mathrm{P}(6)=2\times\mathrm{P}(1)$.

D'où $\mathrm{P}(1)=\frac{1}{9}$ et $\mathrm{P}(6)=\frac{2}{9}$.

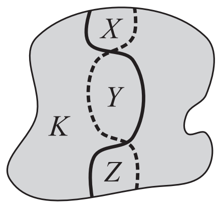
8. Réponse **C.** Il y a des sommets qui sont communs à 5 polygones (comme le sommet marqué en haut à gauche sur la figure ci-contre). Il faut donc au moins 5 couleurs et 5 est le minimum puisque la figure montre un coloriage possible avec 5 couleurs.



9. Réponse **B.** Quel que soit le 1er *coup*, on obtient 4 verres à l'envers et 2 à l'endroit. Il n'y a alors aucun 2^{e} *coup* permettant d'avoir les six verres à l'envers. Et comme on peut obtenir les six verres à l'envers en 3 *coups* (comme montré ci-contre, en retournant, au 2^{e} *coup*, 3 des verres qui sont à l'envers et 1 verre qui est à l'endroit), 3 est la bonne réponse.



10. Réponse **E.** Appelons K l'aire de la partie gauche du parc (voir figure). Alors l'aire $K+Y$ est égale à la moitié de l'aire du parc (partagé par le chemin en continu). De même, $K+X+Z$ est égale à la moitié de l'aire du parc (partagé par le chemin en pointillé). Et donc $Y=X+Z$.



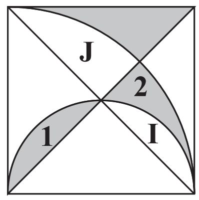
11. Réponse **A.** Soit x la quantité dont on augmente a, ou b, ou c. Le volume, qui est abc, augmente de xbc si c'est a qu'on augmente, de xac si c'est b et de xab si c'est c.
b et c étant chacun plus grand que a, l'augmentation la plus grande est xbc, qui se produit quand on augmente a.

12. Réponse **B.** On a $6=2\times3$ et $10=2\times5$. Si on multiplie S fois par 6 et D fois par 10 le nombre obtenu sera égal à $2^{S+D}\,3^{S}\,5^{D}$. On ne peut donc pas obtenir $2^{90}\,3^{20}\,5^{80}$ (B) car $90\neq20+80$.

13. Réponse **E.** Soient j et k ($j\leqslant k$) les côtés entiers des carrés en cm. On a : $k^2-j^2=19$. D'où $(k-j)(k+j)=19$. 19 étant premier et les deux facteurs étant des entiers, on a donc $k+j=19$ et $k-j=1$. Ce qui donne $k=10$ et $j=9$. La somme des périmètres de deux carrés est donc $4\times(10+9)$, soit 76 (en cm).

14. Réponse **C.** Si A est l'affirmation vraie, alors C n'est pas vraie et B serait vraie aussi, donc A n'est pas vraie.
D n'est pas vraie car A serait vraie aussi.
B n'est pas vraie car alors E serait vraie aussi.
B n'étant pas vraie, alors si E était vraie, *k* serait un nombre premier différent de 2 donc impair et C serait vraie ; donc E n'est pas vraie.
C'est donc C qui est vraie et le nombre doit être impair et ni premier ni divisible par 3 (comme, par exemple, 25, 35, 49).

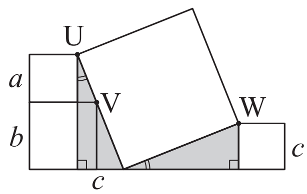
15. Réponse **A.** Traçons la deuxième diagonale du carré (voir figure).
Les parties 1 et I sont symétriques (par rapport à une médiane du carré). J et la réunion de I et 2 sont symétriques (par rapport à une diagonale du carré).



L'aire des parties grisées est donc égale au quart de l'aire du carré et vaut, en cm^2, $\dfrac{6\times 6}{4}$ soit 9.

16. Réponse **A.** En multipliant chacun des nombres par 12, on obtient, dans l'ordre, $3p+9q$, $4p+8q$, $6p+6q$, $8p+4q$ et $9p+3q$.
La somme des coefficients de p et de q étant la même dans chaque expression, et comme $p<q$, le nombre le plus grand est celui qui a le plus grand coefficient pour q ; c'est donc le premier.
(On peut aussi remarquer que les nombres proposés sont tous des moyennes pondérées de p et q ; et donc, celui où la proportion de q est la plus grande est le nombre le plus grand.)

17. Réponse **C.** En prolongeant un côté du carré de côté a, on obtient la figure ci-contre. Les deux triangles rectangles grisés ont alors les mêmes angles et leurs hypoténuses ont même longueur (le côté du grand carré).



Les deux triangles sont donc égaux et les côtés de l'angle droit sont $a+b$ et c. Le côté du grand carré est donc égal à $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

18. Réponse **B.** L'aire totale des 6 faces du cube $3\times3\times3$ est $3\times3\times6$ soit 54. La moitié de cette aire, 27, doit provenir de petits cubes verts.
Un petit cube placé à l'un des 8 sommets du grand cube a 3 faces visibles.
Un petit cube placé au milieu d'une des 12 arêtes a 2 faces visibles.
Un petit cube placé au centre d'une des 6 faces a 1 face visible.
Le petit cube placé au centre du grand cube n'a aucune face visible.
Pour utiliser le moins possible de cubes verts, il faut donc en placer 8 aux sommets (aire : $3\times8=24$), 1 au milieu d'une arête (aire : 2) et 1 au centre d'une face (aire : 1). Cela fait $8+1+1$ soit 10 cubes.

19. Réponse **E.** Il y a 900 entiers positifs à trois chiffres.
Comptons ceux ne contenant ni 1 ni 2 ni 3 : il y a 6 choix possibles pour le chiffre des centaines (4, 5, 6, 7, 8 ou 9 mais pas 0) et 7 choix pour les deux autres chiffres. Cela fait donc $6 \times 7 \times 7$ soit 294 nombres.
Il y a donc $900 - 294$ soit 606 nombres entiers positifs à 3 chiffres ayant au moins un chiffre 1 ou un chiffre 2 ou un chiffre 3.

20. Réponse **B.** $\overline{pq,rs}$ est la moyenne de $\overline{pq}$ et $\overline{rs}$, donc :
$\overline{pq} + \overline{rs} = 2 \times \overline{pq,rs}$. $50\,(\overline{pq} + \overline{rs}) = 100 \times \overline{pq,rs} = \overline{pqrs} = 100 \times \overline{pq} + \overline{rs}$.
Ce qui donne : $49 \times \overline{rs} = 50 \times \overline{pq}$. Les nombres à deux chiffres $\overline{pq}$ et $\overline{rs}$ sont donc 49 et 50 et la somme des chiffres de 4950 est 18.
(On peut aussi remarquer que la moyenne de deux entiers ne peut avoir que « 00 » ou « 50 » après la virgule ; ce qui entraîne que $\overline{rs}$ vaut 50 ; puis que $\overline{pq}$ vaut 49 avec 49,50 comme moyenne de $\overline{pq}$ et $\overline{rs}$…)

21. Réponse **A.** Soit ℓ la longueur d'une bougie (en m), v la vitesse de celle qui brûle le plus vite (en m/h) et T le temps (en h) entre l'allumage et le moment où la plus lente est 3 fois plus longue que la plus rapide.
On a : $3(\ell - v\mathrm{T}) = \ell - \dfrac{4}{5}v\mathrm{T}$ d'où $15\ell - 15v\mathrm{T} = 5\ell - 4v\mathrm{T}$ soit $10\ell = 11v\mathrm{T}$.
Et comme $\ell = 4v$, on obtient $\mathrm{T} = \dfrac{40}{11}$.

22. Réponse **D.** Considérons une carte ayant les nombres x et X écrit chacun sur une face (avec $x < X$), une autre avec y et Y ($y < Y$) et que $x + X < y + Y$. On a alors : $X - y < Y - x$.
Et donc, pour obtenir le résultat le plus grand, il faut :
- prendre les trois cartes ayant les plus grandes sommes quand on ajoute leurs deux faces et mettre le plus grand des deux nombres (Y) dans les emplacements comptés positivement ;
– mettre, dans les emplacements comptés négativement, le plus petit des deux nombres de chacune des trois cartes restantes (x).
Les sommes sont 5+12=17, 3+11=14, 0+16=16, 7+8=15, 4+14=18 et 9+10=19 ; on ajoute donc 10, 14 et 12 et on soustrait 0, 7 et 3.
Le plus grand résultat pouvant être obtenu est :

$$\boxed{10} + \boxed{14} + \boxed{12} - \boxed{0} - \boxed{7} - \boxed{3} = 26.$$

23. Réponse **D.** Soit n le nombre de dés de Léa. Il y a 12^n cas possibles.
Si les probabilités sont égales alors les nombres de cas favorables aussi.
Nombre de cas où l'on obtient un et un seul 12 : $n \times 11^{n-1}$.
Nombre de cas où l'on n'obtient aucun 12 : 11^n.
On a donc $n \times 11^{n-1} = 11^n$ d'où $n = 11$. Léa a 11 dés.
Remarque : on retrouve ici deux cas particuliers de la loi binomiale $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, maintenant au programme de Terminale.

24. Réponse **A.** Appelons a le nombre de coups avec les 4 premières cases, et dans l'ordre b, c, d et e les nombres de coups avec les autres quatuors. Les nombres dans les cases sont alors :

a	$a+b$	$a+b+c$	$a+b$ $+c+d$	$b+c$ $+d+e$	$c+d+e$	$d+e$	e

Avec les nombres connus, on obtient $c = 42 - 30 = 12$.
Et le nombre cherché $d + e$ est alors égal à $36 - c$ donc 24.
Remarque : la situation est bien atteignable, par exemple avec $a = 17$, $b = 13$, $c = 12$, $d = 10$, $e = 14$ (on doit avoir $a + b = 30$).

17	30	42	52	49	36	24	14

25. Réponse **4.** On a $mn = 5(m + n)$ d'où $(m - 5)(n - 5) = 25$.
Les seules décompositions de 25 en produit de deux entiers positifs sont 25×1 et 5×5. Et il y a donc 4 couples possibles d'entiers relatifs avec les produits $(-1) \times (-25)$ et $(-5) \times (-5)$.
Les couples (m, n) correspondants, avec $m \leqslant n$, sont $(6 ; 30)$, $(10 ; 10)$, $(-20 ; 4)$ et $(0 ; 0)$.

26. Réponse **3.** On a $1^1 = 1$, $2^2 = 4$, $3^3 = 27$, $4^4 = 256$, $5^5 = 3125$ et $6^6 > 10\,000$. Donc aucun des chiffres n'est plus grand que 5.
S'il n'y a pas de 5, $a^a + b^b + c^c + d^d$ vaut au plus $4 \times 4^4 = 1024$ et a doit valoir 1 ; mais comme $1 + 3 \times 4^4 < 1000$, c'est impossible.
S'il y a deux 5, alors $5^5 + 5^5 > 6000$ et c'est impossible.
Il y a donc un seul chiffre 5 dans le nombre.
Et alors, $a^a + b^b + c^c + d^d$ vaut au plus $3125 + 3 \times 4^4 = 3893$.
Le nombre, supérieur à 3125 et inférieur à 3893, a donc 3 comme chiffre des milliers.
Ce nombre est 3435 (avec $3435 = 27 + 256 + 27 + 3125$).